

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

---

СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ

Выпуск 16

Под редакцией  
академика Б. Б. КАДОМЦЕВА



МОСКВА  
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ  
1987

УДК.533.9.01

**Вопросы теории плазмы:** Сб. ст. Вып. 16/Под ред. акад. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1987, 256 с.

Представлены обзоры по теории переноса частиц и тепла в тороидальных плазменных конфигурациях, связанного с наличием группы частиц, запертых в локальных минимумах тороидального магнитного поля.

Для научных работников и инженеров, специализирующихся в области физики плазмы.

Редколлегия: А. А. Галеев, В. В. Параил, О. П. Погуце,  
Д. Д. Рютов

# КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ В ТОКАМАКАХ

А. В. Гуревич, Я. С. Димант

---

## ВВЕДЕНИЕ

Процессы классического переноса плазмы поперек магнитного поля резко ослабевают с ростом температуры электронов и ионов. Вследствие этого в сильно нагретой разреженной плазме, удерживаемой магнитным полем, главную роль постепенно начинают играть новые механизмы переноса, связанные с отдельными группами частиц и тонкими особенностями геометрии магнитного поля.

В частности, в токамаках все частицы по отношению к магнитному полю можно разделить на *пролетные* — свободно перемещающиеся вдоль поля, и *запертые* — отражающиеся магнитными пробками. Число запертых частиц относительно невелико. Несмотря на это, с ростом температуры происходит постепенный переход от классического процесса переноса [1], в котором участвуют все частицы, к неоклассическому переносу [2], в котором главную роль играют запертые частицы, движущиеся по банановым траекториям (*банановые частицы*).

Такая простая картина справедлива, однако, только для аксиально-симметричного тороидального магнитного поля. В реальных токамаках магнитное поле гофрировано, т. е. его амплитуда слегка осциллирует вдоль главной оси тора. В результате возникают новые магнитные ямы, связанные с локальными гофрами. Их наличие приводит к появлению особых групп частиц — частиц, захваченных в гофры [3], и к возникновению связанного с ними нового механизма поперечного переноса, носящего *конвективный* характер [4]. В достаточно нагретой плазме ( $T \sim 2 \div 5$  кэВ) этот механизм переноса, называемый *кинетической конвекцией*, может сделаться существенным и даже определяющим. Он сопровождается сильным искажением функций распределения частиц.

Отметим, что локальные потенциальные ямы и захваченные частицы аналогичного типа могут возникать и в процессе нелинейной динамики плазменного разряда, что также приводит к эффективной кинетической конвекции.

Во всех этих случаях для правильного описания поведения плазмы уже нельзя ограничиться рассмотрением только гидродинамических уравнений для макроскопических параметров — концентрации плазмы, температуры электронов и ионов, тока и т. д., а следует учитывать и изменение вида функции распределения.

Становится необходимым поэтому переход к *кинетическому описанию* плазмы в токамаках. Развитие кинетической теории процессов конвективного переноса в токамаках и является основной целью настоящей работы.

## 1. ОБЩЕЕ КАЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ

### 1.1. Магнитная гофрировка

Осцилляции магнитного поля связаны с дискретной (секционной) структурой магнитных катушек токамака [3—9]. Эти осцилляции представляют собой мелкую «рябь», наложенную на более плавное тороидальное изменение напряженности магнитного поля  $B$  (рис. 1). На одном периоде вращательного преобразования магнитной силовой линии умещается обычно большое число локальных гофров

$$Nq \gg 1. \quad (1.1)$$

Здесь  $N$  — число отдельных катушек, создающих внешнее магнитное поле в токамаке;  $q \geq 1$  — коэффициент запаса устойчивости:

$$q = \epsilon B_\phi / B_\theta; \quad \epsilon = \rho / R_0; \quad (1.2)$$

$B_\phi$  — азимутальная, а  $B_\theta$  — полоидальная компоненты вектора магнитного поля  $\mathbf{B}$ ,  $\rho$  — малый радиус магнитной поверхности;  $R_0$  — главный радиус тора. Относительная глубина гофрировки магнитного поля обычно мала:

$$\delta = \delta B / B \ll 1 \quad (1.3)$$

( $\delta B$  — амплитуда осцилляций  $B$ ). При этом зависимость напряженности магнитного поля от тороидальных координат  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  в простейшем приближении имеет вид [5—9]

$$B \approx B_0 [1 - \epsilon \cos \theta - \delta(\rho, \theta) \cos(N\phi)], \quad (1.4)$$

где  $\theta$  — полоидальный,  $\phi$  — тороидальный углы, а  $B_0$  — напряженность магнитного поля на магнитной оси токамака  $\rho=0$ . Немонотонное изменение напряженности магнитного поля  $B$  вдоль заданной силовой линии приводит к появлению локальных магнитных

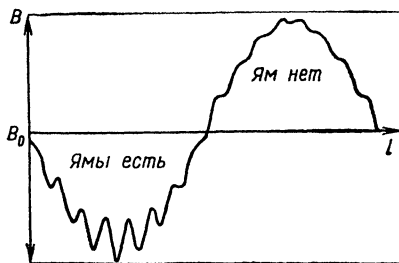


Рис. 1. Влияние гофрировки на напряженность магнитного поля  $B$  вдоль длины силовой линии  $l$  в токамаке ( $B_0$  — значение  $B$  на магнитной оси токамака; магнитные ямы присутствуют только на наружной оси тора)

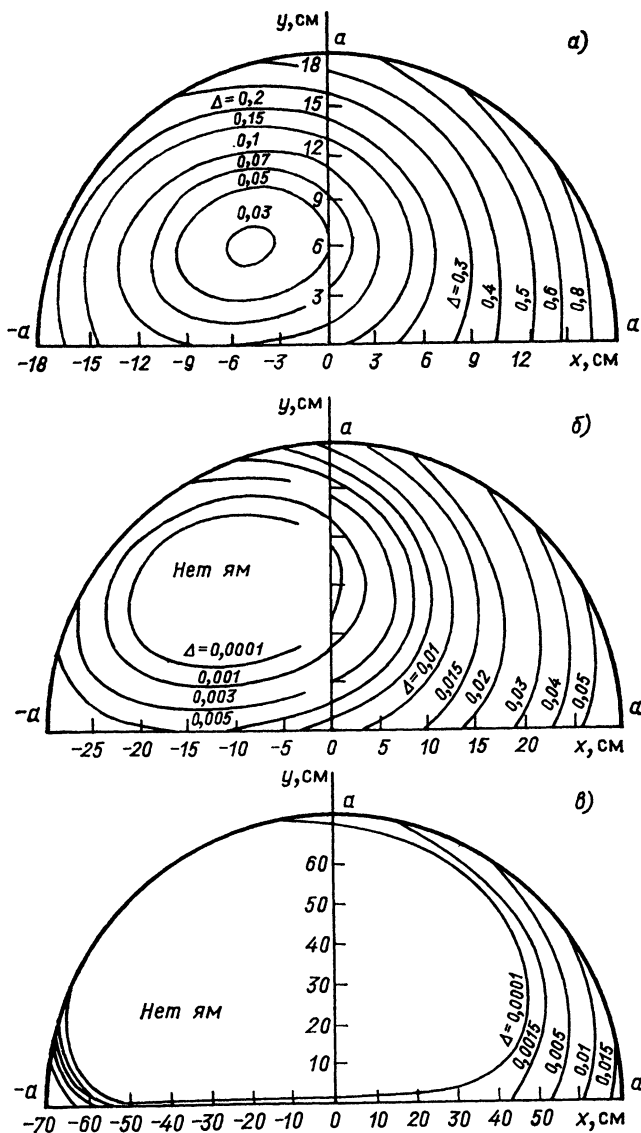


Рис. 2. Примеры распределения относительной глубины магнитных ям гофров по сечению плазменного шнура в токамаках [8]. Показаны линии уровня с фиксированными значениями  $\Delta$ . Внутренняя часть тора расположена слева, наружная — справа:

$a$  — Т-4;  $q(0)=1$ ;  $q(17 \text{ см})=3$ ;  $b$  — Т-10;  $q(0)=1$ ;  $q(29 \text{ см})=3$ ;  $v$  — Т-15 (строится);  $q(0)=1$ ,  $q(70 \text{ см})=3$

ям. Важно, однако, что плавная тороидальная модуляция  $B$  [см. второе слагаемое в формуле (1.4)] может приводить к эффективному уменьшению или даже полному исчезновению магнитных ям, связанных с локальными гофрами  $B$  (рис. 1). Рассматривая изменение  $B$  (1.4) вдоль заданной магнитной силовой линии, легко видеть, что основным параметром, характеризующим уменьшение магнитных ям, является величина  $\alpha^*$  (см. § 3.1):

$$\alpha^* = \alpha |\sin \theta|, \quad \alpha(\rho, \theta) = e/(Nq\delta). \quad (1.5)$$

При  $\alpha^* \ll 1$  магнитные ямы гофров практически не возмущаются тороидальной «крутизной» магнитного поля; в этом случае их относительная глубина  $\Delta$  примерно равна  $2\delta$ . При  $\alpha^* \leq 1$  их глубина  $\Delta$  заметно уменьшается, а при  $\alpha^* \geq 1$  локальные магнитные ямы гофров полностью исчезают (подробнее см. [7—9], а также § 3.1). Наличие или отсутствие областей исчезновения локальных магнитных ям связано с конкретной конструкцией данного токамака. Например, в токамаке Т-4 всегда  $\alpha^* < 1$  и локальные магнитные ямы распределены по всему объему плазменного шнура (рис. 2, а [8]). В Т-10 зоны исчезновения магнитных ям занимают около половины плазменного разряда (рис. 2, б). В токамаках следующего поколения (Т-15, JT-60, TFTR, JET и др.) в большей части разряда значение  $\alpha$  (1.5) заметно превышает единицу. При этом магнитные ямы остаются только в окрестности экваториальной плоскости токамака (где  $|\sin \theta| \ll 1$ ) и в узком слое на внешней периферии тора (рис. 2, в).

## 1.2. Локально-запертые частицы

Несмотря на малую относительную глубину гофрировки, ее наличие приводит к появлению нового механизма поперечного переноса, весьма эффективного при достаточно высоких температурах частиц. Действительно, благодаря наличию гофрировки часть электронов и ионов плазмы оказывается захваченной в локальные магнитные ямы гофров. Такие частицы называют *локально-запертыми* (также *суперзапертыми* или *блокированными* [3—9]). Двигаясь вдоль магнитного поля по коротким осциллирующим траекториям, ограниченными размерами данного гофра, такие частицы не испытывают вращательного преобразования. Они свободно дрейфуют в неоднородном магнитном поле токамака поперек магнитных поверхностей со скоростью дрейфа [10]

$$v_{dr} \approx \frac{c\mathcal{E}}{eB^2} [\nabla B \cdot \mathbf{B}], \quad (1.6)$$

где  $\mathcal{E} = mv^2/2 \approx mv_{\perp}^2/2$  — кинетическая энергия захваченной частицы; здесь учтено, что при условии (1.3)  $v_{\parallel} \ll v_{\perp}$  ( $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  — скорости частицы вдоль и поперек  $\mathbf{B}$ ). Из (1.6) видно, что дрейф

локально-запертых частиц в токамаке практически вертикальный\*. Этот дрейф приводит к быстрому перемещению частиц поперек плазменного шнура и к частичному их выносу на стенки камеры. Характерное значение скорости дрейфа, см/с,

$$v_{dr} \approx \frac{c\mathcal{E}}{eBR_0} \approx 10^5 \frac{\mathcal{E}}{BR_0}, \quad (1.7)$$

где  $\mathcal{E}$  — в кэВ;  $B$  — в Тл;  $R_0$  — в м.

Соответственно время, за которое дрейфующая частица пересекает камеру, составляет (в с)

$$\Delta t_{dr} \approx 10^{-3} aR_0B/\mathcal{E}, \quad (1.8)$$

где  $a$  — малый радиус плазменного шнура (радиус диафрагмы), м;  $R_0$  — в м;  $B$  — Тл;  $\mathcal{E}$  — в кэВ. Видно, что время пролета  $\Delta t_{dr}$  сравнительно невелико.

Важно, однако, что захваченные в магнитные гофры частицы удерживаются в них весьма ограниченное время. Действительно, частица является локально-запертой в гофре только в том случае, если ее продольная скорость мала:

$$v_{\parallel} < v_{\perp} \sqrt{\Delta}. \quad (1.9)$$

Достаточно за счет соударений хотя бы немного изменить соотношение (1.9), как локально-запертая частица покинет гофр и обратится в обычную тороидально-запертую (банановую) частицу. И наоборот, банановая частица вблизи точек поворота ( $v_{\parallel} \ll v_{\perp}$ ) может из-за соударений немного изменить свой питч-угол и стать локально-запертой. Таким образом, соударения в плазме токамака приводят к непрерывному обмену между банановыми и локально-запертыми частицами.

Время удержания локально-запертой частицы в гофре, ограниченное соударениями, составляет

$$\tau_{dr} = 1/\nu_{dr} \sim \Delta/\nu(\mathcal{E}), \quad (1.10)$$

где  $\nu(\mathcal{E})$  — характерная частота кулоновских соударений быстрой частицы с энергией  $\mathcal{E}$ . Например, для ионов с массой  $m_i$  и зарядом  $e_i = Z_i e$  частота  $\nu$ , с<sup>-1</sup>,

$$\nu = \frac{\sqrt{2} \pi n e^4 \ln \Lambda Z_i^2}{m_i^{1/2} \mathcal{E}^{3/2}} \approx 2,5 \cdot 10^4 \frac{n Z_i^2}{\mathcal{E}} \left( \frac{m}{m_i} \right)^{1/2}, \quad (1.11)$$

где  $n = 10^{13}$  см<sup>-3</sup>;  $\mathcal{E}$  — в кэВ.

Здесь  $n$  — концентрация частиц;  $m$  — масса электрона;  $\ln \Lambda$  — кулоновский логарифм (в числовом коэффициенте он принят равным 20). За характерное время между соударениями порядка  $\nu^{-1}$  частица полностью меняет направление своего импульса. Для вы-

\* Здесь не учитывается действие радиального электрического поля, которое может привести к искривлению и даже к замыканию дрейфовых траекторий, см. § 2.8.

хода же из локальной магнитной ямы гофра его достаточно изменить совсем немного (1.9), с этим и связано появление в выражении для  $\tau_{dr}$  (1.10) малого множителя  $\Delta$ .

Из (1.7), (1.10), (1.11) вытекает, что длина свободного дрейфового пробега локально-запертой частицы, т. е. то расстояние, которое она пробегает за время пребывания в гофре  $\tau_{dr}$  (1.10), составляет, см

$$l_{dr} \approx \frac{\Delta c \mathcal{E}}{Z_{\alpha} e B R_0 v} \approx \frac{4}{Z_{\alpha}^3} \frac{\Delta \mathcal{E}^{3/2}}{B R_0 n} \left( \frac{m_{\alpha}}{m} \right)^{1/2}, \quad (1.12)$$

где  $\mathcal{E}$  — в кэВ;  $B$  — в Тл;  $R_0$  — в м;  $n = 10^{13}$  см $^{-3}$ .

Видно, что эта длина очень быстро растет с увеличением энергии частиц. Для ионов она значительно больше, чем для электронов.

### 1.3. Диффузионный предел

Рассмотрим вначале тепловые частицы  $\mathcal{E} \sim T_{\alpha}$ , где  $T_{\alpha}$  — температура частиц сорта  $\alpha$ . Длина их дрейфового пробега  $l_{drT}$ , как следует из (1.12), пропорциональна  $T_{\alpha}^{3/2}$ . При достаточно низкой температуре  $T_{\alpha}$  она невелика:

$$l_{drT} \ll L_{\perp};$$

$$L_{\perp} \sim T_{\alpha} \left| \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial \rho} \right|, \quad n \left| \frac{\partial n}{\partial \rho} \right| \sim a. \quad (1.13)$$

При условии (1.13) длина свободного дрейфового пробега в гофре существенно меньше характерного поперечного масштаба установки  $L_{\perp}$ . В этом случае процесс переноса на локально-запертых частицах носит диффузионный характер.

Действительно, рассмотрим данную магнитную поверхность  $\rho = \text{const}$  (рис. 3). Локально-запертые частицы в результате дрейфа переходят с данной магнитной поверхности на соседние, причем в верхней половине тора они переходят на поверхность с малым радиусом  $\rho + \Delta\rho$ , а в нижней — на поверхность с  $\rho - \Delta\rho$  \*. На расстоянии  $\Delta\rho \sim l_{dr} \sin\theta$  локально-запертые частицы покидают гофры из-за соударений и становятся банановыми частицами. Траектории последних практически зеркально-симметричны относительно экваториальной плоскости тора (рис. 3, а). Поэтому после выхода из гофра частицы на данной магнитной поверхности ( $\rho + \Delta\rho$  или  $\rho - \Delta\rho$ ) легко переходят с верхней половины тора на нижнюю и наоборот. Таким образом, хотя вертикальный дрейф смещает локально-запертые частицы в одном направлении, он, в конечном итоге, приводит к перемещению и перемешиванию частиц

\* Здесь принято, что дрейф локально-запертых частиц с данным знаком заряда направлен снизу вверх. Для частиц с противоположным знаком заряда или для тех же частиц, но с противоположным направлением магнитного поля  $B$  направление дрейфа также меняется на противоположное. Все рассуждения при этом остаются в силе, только дрейф в этом случае направлен сверху вниз.



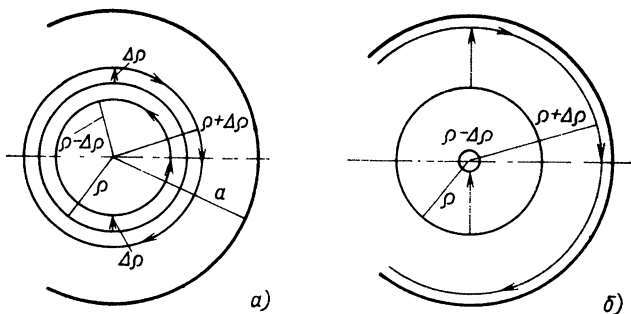


Рис. 3. Поперечный перенос на локально-запертых частицах: *а* — низкоэнергетический диффузионный предел (§ 1.3); *б* — конвективный перенос (§ 1.4)

в обе стороны от рассматриваемой магнитной поверхности  $\rho$ . В условиях (1.13) это перемещение мало и симметрично. Благодаря этому процесс переноса банановых частиц, связанный с их попаданием в гофр, дрейфом в нем и последующим выходом из гофра, в условиях (1.13) носит чисто диффузионный характер. В макроскопических уравнениях, описывающих перенос в плазме, добавляются потоки диффузионного типа, обусловленные дрейфом локально-запертых частиц и их столкновительными переходами в запертые частицы и обратно [3—7, 11] \*.

Отметим, что при макроскопическом описании диффузионного переноса частиц существенно используется предположение о максвелловском характере функции распределения. Однако, как видно из (1.12), дрейфовая длина пробега быстро увеличивается с энергией частиц,  $l_{dr} \sim \mathcal{E}^{5/2}$ . Поэтому для достаточно энергичных частиц условие малого изменения функции распределения на длине  $l_{dr}$

$$l_{dr}(\mathcal{E}) \ll L_f \sim f \left| \frac{\partial f}{\partial \rho} \right| \quad (1.14)$$

перестает выполняться. Так, для максвелловской функции  $f_M$  условие (1.14) нарушается уже при энергиях

$$\mathcal{E} \geq T_\alpha (L_\perp / l_{dr T})^{2/3}. \quad (1.15)$$

Таким образом, даже если условие применимости диффузионного приближения (1.13) хорошо выполнено, при высоких энергиях частиц (1.15) можно ожидать значительное отклонение функции распределения от максвелловской. Основной вклад в диффузион-

\* Если в распределении параметров гофрировки или других величин имеется заметная асимметрия «верх — низ», то наряду с диффузионными потоками, пропорциональными  $\nabla T_\alpha$ ,  $\nabla n$ , могут появляться и нескомпенсированные потоки гидродинамического типа, которые пропорциональны  $n v_{dr}$ ,  $T_\alpha v_{dr}$ .

ный перенос частиц и тепла вносят локально-запертые частицы, энергия  $\mathcal{E}$  которых в несколько раз превышает температуру  $T_\alpha$  (см. § 3.2). Это существенно ухудшает возможность применения диффузионного приближения.

Расчеты показывают [12], что в токамаках масштаба T-10, PLT, INTOR и других диффузионное приближение оказывается неприменимым уже при  $T_i \geq 0,1 \div 0,2$  кэВ,  $T_e \geq 0,3 \div 0,5$  кэВ. Таким образом, реально в уже существующих, а тем более в будущих токамаках процессы переноса в гофрах нельзя описывать в рамках диффузионной модели.

#### 1.4. Кинетическая конвекция

Для ионов и электронов достаточно высоких энергий  $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_{dr}$  дрейфовая длина пробега (1.12) становится сравнимой с поперечным размером тора  $l_{dr}(\mathcal{E}_{dr}) \sim a$ . Характерные энергии  $\mathcal{E}_{dr}$  для ионов ( $\mathcal{E}_{dri}$ ) и электронов ( $\mathcal{E}_{dre}$ ) при этом равны соответственно, кэВ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{dri} &= \frac{e^2}{2} \left[ \frac{8\pi R_0 B}{c \sqrt{m_i}} Z_i^3 \int_0^a \frac{n}{\Delta} d\rho \right]^{2/3} \approx \\ &\approx 2 \left[ Z_i^3 R_0 a B \left\langle \frac{n}{10\Delta} \right\rangle \right]^{2/3}; \quad \mathcal{E}_{dre} \approx \left( \frac{m_i}{Z_i^6 m_e} \right)^{1/3} \mathcal{E}_{dri}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $R_0$ ,  $a$  — в м;  $B$  — в Тл;  $n = 10^{13}$  см $^{-3}$ ;  $\langle \rangle$  означает усреднение по малому радиусу тора.

Если выполняется условие

$$\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{dr}, \quad (1.17)$$

то захваченная в гофр частица перемещается поперек магнитных поверхностей на значительное расстояние  $\Delta\rho \sim a$ . Это приводит к сильной асимметрии переноса: вследствие существенного различия концентрации  $n(\rho)$  и температур  $T_\alpha(\rho)$  на разных магнитных поверхностях  $\rho$  перенос частиц и энергии из центральной области разряда  $\rho \ll a$  на периферию  $\rho \sim a$  и обратно (рис. 3, б) сильно различается. Процесс переноса на локально-запертых частицах приобретает тогда существенно конвективный характер. Конвекция происходит при этом лишь на достаточно высокоэнергетических частицах (1.17), что приводит к сильным искажениям их функций распределения. Такой процесс называют *кинетическим конвективным переносом* (ККП).

Из (1.16) видно, что как в основных действующих, так и в будущих токамаках характерная энергия ионов

$$\mathcal{E}_{dri} \leq (1 \div 3) T_i. \quad (1.18)$$

В этих условиях кинетическая конвекция в тех областях, где имеются локальные магнитные ямы гофров, может приводить к эф-

фактивному выносу быстрых ионов из сильно нагретой приосевой области разряда на его периферию [4, 12—16]. В токамаке обычно выполнено условие

$$\Delta \ll \epsilon \leq 1. \quad (1.19)$$

При этом относительные доли локально-запертых ( $n^L/n$ ) и банановых ( $n^b/n$ ) частиц составляют

$$n^L/n \sim \sqrt{\Delta}, \quad n^b/n \sim \sqrt{\epsilon}. \quad (1.20)$$

Несмотря на то, что при условии (1.19) число локально-запертых частиц меньше числа банановых, конвективный теплоперенос ионов может стать сильнее неоклассического [12] (см. также § 3.6).

Характер и эффективность ККП в реальных токамаках сильно зависят от параметров установки, причем главным образом от распределения параметров гофрировки по сечению плазменного шнура. Роль конвективного переноса в гофрах, в частности, незначительна в тех областях, где отсутствуют локальные магнитные ямы (см. рис. 2, б, в). Если эти области занимают основную часть объема плазмы, то кинетическая конвекция здесь сильно подавлена. Такая ситуация часто осуществляется в токамаках последнего поколения (см. рис. 2, в). Однако, как указано в [17], перенос частиц в гофрах может служить для управления режимом зажигания и работы термоядерного реактора. Для этого необходимо создавать искусственную гофрировку с управляемыми параметрами. Главную роль при этом будут играть процессы ККП.

### 1.5. Искажение функций распределения

Резкое возрастание с энергией  $\mathcal{E}$  длины свободного дрейфового пробега  $l_{dr}$  (1.12) приводит к значительному искажению функций распределения как самих локально-запертых, так и остальных групп частиц (банановых и пролетных). Действительно, ионы и электроны наиболее сильно нагреты в центральной области разряда вблизи магнитной оси токамака. Благодаря конвекции в гофрах они выносятся на периферию разряда, причем тем интенсивнее, чем выше энергия захваченных в гофры частиц. Это приводит к появлению на периферии разряда большого количества быстрых частиц. Важную роль играют кулоновские соударения, которые приводят здесь к выходу частиц из гофров. При этом на периферии разряда отрастают «хвосты» у функции распределения всех групп частиц: локально-запертых, банановых и пролетных. Для ионов эффективная температура в хвосте функции распределения стремится стать такой же, как в центре плазменного шнура.

Еще более сильно может возрасти эффективная температура в хвосте функции распределения электронов. Дело в том, что функция распределения электронов в токамаке в области высоких скоростей искажается за счет действия постоянного электрического поля (эффект убегающих электронов [13, 18—24]). При этом эффективный нагрев электронов в области высоких скоростей возни-

кает не только в направлении убегания  $\theta=0$ , но и в ортогональном к магнитному полю направлении  $\theta=90^\circ$ , важном для захватываемых в гофры частиц [22]. Перенос этих частиц на периферию разряда приводит к значительной деформации функции распределения и сильному увеличению количества быстрых электронов [14, 25].

Кинетическая конвекция в гофрах сопровождается не только изменением энергетического распределения, но и возникновением заметной анизотропии в питч-угловом распределении частиц. Дело в том, что перенос в гофрах при достаточно высоких энергиях частиц становится слишком быстрым, и функция распределения запертых частиц не успевает выравняться по углам за счет соударений. Это приводит и к неравномерному пространственному распределению банановых частиц по магнитной поверхности: их количество в наружных областях токамака оказывается больше, чем во внутренних, — асимметрия «внутрь — наружу» (см. § 3.3, 3.4).

Сильная асимметрия возникает и в распределении локально-запертых частиц: благодаря вертикальному дрейфу снизу вверх их количество в верхней половине токамака больше, чем внизу, — асимметрия «верх — низ» (см. § 3.3, 3.4).

Таким образом, в тех областях токамака, где имеются локальные магнитные ямы гофров, возникают сильные искажения функций распределения частиц — образование «хвостов», питч-угловая анизотропия, неравномерное распределение по сечению плазменного шнура. Отметим, что основной перенос из центра разряда на периферию осуществляется локально-запертыми частицами с энергией  $\mathcal{E}_1 \sim (0,5 \div 1) \mathcal{E}_{\text{ар}}$ . Сильные искажения функции распределения на периферийных магнитных поверхностях могут начинаться при еще меньших значениях энергии ( $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_1$ ).

Это связано с тем, что быстрые частицы, приходящие из центральной области на периферию разряда, «охлаждаются» здесь в результате кулоновских соударений с фоновой плазмой, имеющей меньшую температуру  $T_\alpha(\rho) < T_\alpha(0)$ . Возникает «поток» частиц в пространстве скоростей в область малых энергий. При энергии  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$  количество таких «охладившихся» частиц превышает равновесную максвелловскую функцию распределения на данной магнитной поверхности. При  $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_0$  эти величины сравниваются, а при  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$  уже преобладает фоновая плазма (см. § 3.3, 3.4). В условиях развитой кинетической конвекции, когда  $\mathcal{E}_{\text{ар}} \leq (3 \div 5) T_\alpha(0)$ , изменения функции распределения становятся столь значительными, что они существенно сказываются на процессах переноса в токамаке. Иначе говоря, они начинают определять поведение макроскопических параметров плазмы.

## 1.6. Адиабатический захват

Выше предполагалось, что захват частиц в магнитные ямы гофров и их выход происходят только за счет соударений. Это спра-

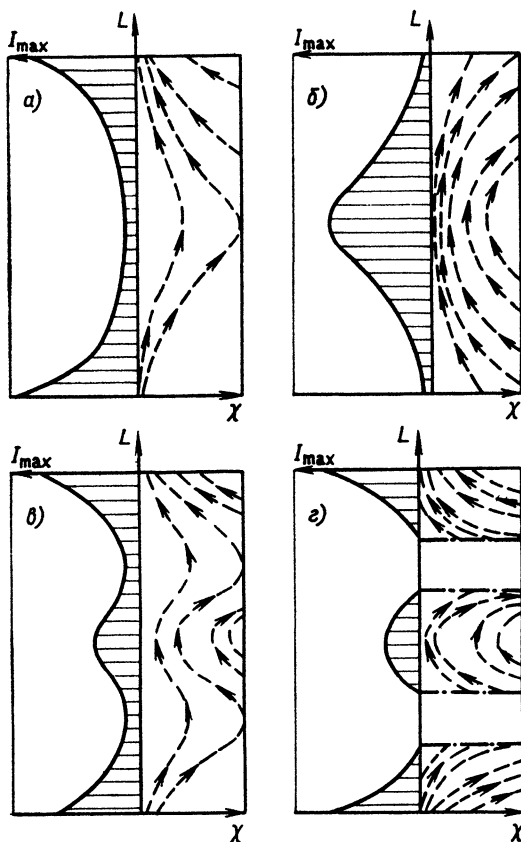


Рис. 4. Примеры изменения максимального адиабатического инварианта продольного движения локально-запертых частиц  $I_{\max}$  вдоль траектории их дрейфового движения (дрейф направлен вверх). На графиках  $L(\chi)$  показаны характеристики уравнения (3.67) ( $\Gamma \sim I_{\max}$ , см. § 3.5)

ведливо, если параметры магнитной ямы гофра не меняются вдоль дрейфовой траектории частицы. Если же ее глубина изменяется, то частица может и без соударений захватиться в яму или выйти из нее. Этот процесс, называемый *адиабатическим захватом* [4], играет важную роль в кинетической конвекции при редких соударениях. Он пояснен на рис. 4. Если глубина ямы увеличивается вдоль дрейфовой траектории, то банановые частицы захватываются в яму, в противном случае, наоборот, локально-запертые частицы покидают гофр и становятся банановыми.

Количественно этот процесс удобно описывать, учитывая, что захваченные в магнитной яме частицы совершают колебания вдоль  $\mathbf{V}$  и имеют поэтому адиабатический инвариант продольно-

$$I = \frac{1}{2\pi} \int P_{\parallel} dl \quad (1.21)$$

( $l$  — длина дуги вдоль силовой линии).

Адиабатический инвариант сохраняется при медленном изменении параметров магнитной ямы вдоль дрейфовой траектории осциллирующей в яме частицы. Он близок к нулю для частиц, осциллирующих вблизи «дна» ямы, растет с ростом амплитуды осцилляций и равен максимальному значению  $I_{\max}$  для частиц, осциллирующих вблизи границы ямы (см. рис. 4). Максимальный адиабатический инвариант  $I_{\max}$  определяется формой магнитной ямы. В параболической аппроксимации (2.78) (приближение гармонического осциллятора)

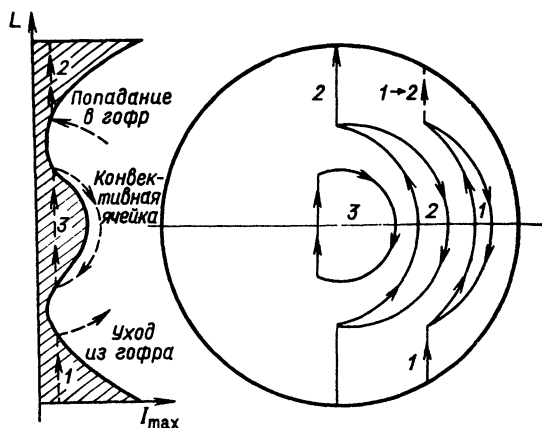
$$I_{\max} = C \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta}; \quad C = \frac{R_0}{N} \sqrt{\frac{m\alpha^2 g}{2}}. \quad (1.21a)$$

Здесь  $\Delta$  — относительная глубина ямы (1.19), слабо меняющийся параметр  $\beta \sim 1$  (при  $\alpha^* \ll 1$  (1.5),  $\Delta \approx 2\delta$ ,  $\beta \approx 1/2$ , см. § 3.1). Типичные примеры изменения максимального адиабатического инварианта  $I_{\max}$  («объема» магнитной ямы) вдоль дрейфовой траектории, т. е. по вертикали, показаны на рис. 4. Если «объем» магнитной ямы  $I_{\max}$  убывает вдоль траектории, то частицы с  $I \approx I_{\max}$  выходят из ямы. Напротив, если  $I_{\max}$  растет вдоль траектории, то яма углубляется и банановые частицы захватываются в нее. Количество захватывающихся или освобождающихся частиц

$$\frac{dn}{dt} \sim v_{dr} \frac{dI_{\max}}{d\rho} \sim v_{dr} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta} \right).$$

Таким образом, в токамаках с изменяющейся по вертикали гофрировкой локально-запертые и банановые частицы оказываются сильно связанными даже при пренебрежении соударениями. Имеются траектории, при которых локально-запертые частицы переходят в банановые и наоборот (рис. 5). Траектория 1 начинается от стенок камеры. Частица на этой траектории вначале движется как локально-запертая — она с самого начала захвачена в гофр и дрейфует в вертикальном направлении. Поскольку, однако, глубина гофра  $\Delta$  убывает с уменьшением  $\rho$ , то в некоторой точке  $\rho = \rho_1$  ее адиабатический инвариант  $I$  сравнивается с  $I_{\max}(\rho_1)$ . Здесь частица покидает гофр и переходит на обычную банановую траекторию. Таким же образом частицы на банановых траекториях в глубине плазмы могут быть захвачены в гофр и выходить на стенки камеры (траектория 2). (В частности, двигаясь вначале по траектории 1, та же частица может продолжить движение по симметричной траектории типа 2). Такие траектории естественно назвать *открытыми* — они прямо связывают глубинные области плазмы со стенками камеры. Возможно также обра-

Рис. 5. Открытые и замкнутые траектории дрейфового движения локально-запертых частиц в пренебрежении соударениями. Слева показано соответствующее изменение  $I_{\max}$  вдоль дрейфовой траектории  $L$



зование *замкнутых* дрейфово-банановых траекторий, приводящих к возникновению внутри токамака конвективных ячеек, — «толстые» бананы (траектория 3).

Следует подчеркнуть, что столкновения частиц усложняют эту идеализированную картину. Они приводят либо к прерыванию этих траекторий, либо, наоборот, к образованию комплексных траекторий, в которых отдельные элементы типа 1, 2, 3 связаны между собой в произвольной последовательности. Поэтому открытые или замкнутые траектории в чистом виде возникают только для достаточно быстрых частиц, когда выполнено условие сильной кинетической конвекции:

$$\mathcal{E} > \mathcal{E}_{dr}. \quad (1.22)$$

При этом в тех областях токамака, где гофрировка, непрерывно нарастая вдоль дрейфовой траектории, выводит частицы прямо на стенки камеры (см. рис. 4), адиабатический захват может привести к заметному опустошению фракции быстрых частиц в периферийных областях плазмы. Эффективность такого опустошения можно характеризовать локальным параметром — характерной частотой адиабатического ухода  $v_{ad}(\rho)$  (см. § 3.5):

$$v_{ad} \approx \frac{v_{dr}}{50 \sqrt{\epsilon}} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta} \right) \approx \frac{c\mathcal{E}}{50eB \sqrt{R_0\rho}} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta} \right). \quad (1.23)$$

В условиях (1.22) частота адиабатического захвата превышает частоту соударений. Это и приводит к тому, что возникает сильная деформация (опустошение) функции распределения, что оказывает определяющее влияние на процессы переноса.

Существенное влияние на процессы переноса частиц в гофра может оказать также радиальное электрическое поле. Оно приводит к искривлению дрейфовых траекторий и к значительному усложнению общей картины. Если характерное значение напряжен-

ности электрического поля

$$E \sim T_{i,e} e L_{\perp} \sim T_{i,e} e a, \quad (1.24)$$

то это поле оказывает заметное влияние только на частицы с энергией

$$\mathcal{E} \lesssim T_{i,e} \frac{R_0}{a}. \quad (1.25)$$

При больших энергиях частиц,  $\mathcal{E} \gg T_{i,e} R_0/a$ , влияние электрического поля малосущественно.

Заметим также, что в условиях сильной конвекции (1.22) перенос частиц в конвективной ячейке (траектория 3 на рис. 5) не приводит к сильным возмущениям функции распределения. Действительно, банановые частицы, захваченные в гофр на данной магнитной поверхности, высвобождаются из него в зеркально-симметричной точке на той же самой магнитной поверхности. Поэтому в отсутствие соударений уход банановых частиц с данной магнитной поверхности в точности компенсируется приходом на эту поверхность такого же числа частиц. Если, однако, учесть соударения частиц как малую добавку, то происходит раскомпенсация захватившихся и выходящих потоков частиц — возникает перенос диффузионного типа [9].

### 1.7. Цель исследования

Все рассматривавшиеся ранее механизмы как классического и неоклассического переноса, так и диффузионного переноса в локальных магнитных гофрах токамака приводили лишь к слабому возмущению функций распределения частиц, которые предполагались всегда близкими к равновесным максвелловским. При этом наличие в плазме градиентов концентрации  $n$  и температур электронов и ионов  $T_{e,i}$  приводило к относительно слабым потокам частиц. Это создавало возможность описания плазмы в токамаках с помощью замкнутой системы гидродинамических уравнений для макроскопических параметров (моментов)  $n$ ,  $T_e$ ,  $T_i$  и др. Кинетическая теория служила лишь для вычисления кинетических коэффициентов переноса, являющихся функциями моментов. Ситуация была, таким образом, совершенно стандартной — аналогичной классической теории неоднородных газов [27].

Наличие существенно нелокального кинетического конвективного переноса принципиально меняет ситуацию. Он приводит к возникновению значительных искажений функций распределения, т. е. к сильному отклонению их от равновесных, максвелловских значений. В условиях развитой кинетической конвекции эти искажения оказывают существенное влияние на процессы переноса. Поэтому обычное описание поведения плазмы в рамках только макроскопических уравнений переноса становится невозможным: необходим переход к последовательному описанию плазмы на основе кинетической теории.



В настоящей работе проводится такое кинетическое описание на конкретном примере конвективного переноса частиц в локальных гофрах магнитного поля. Возникающие при этом трудности связаны с многомерным характером кинетических уравнений, сложным видом входящих в него интегральных членов (оператор соударений) и сложной структурой гофрированного магнитного поля в токамаках. Необходимо поэтому произвести максимально возможное упрощение уравнений. Выводу таких упрощенных уравнений посвящена гл. 2 настоящей статьи. Упрощение кинетических уравнений становится возможным благодаря наличию ряда малых параметров и использованию конкретных особенностей геометрии токамаков.

Прежде всего следует учесть, что длина свободного дрейфового пробега частиц  $l_{dr}$  (1.12) резко растет с ростом их энергии. Поэтому наиболее сильные возмущения функций распределения возникают в области быстрых, т. е. надтепловых, частиц. Это позволяет, следуя общему подходу [19], разбить все частицы плазмы на две фракции: основную тепловую (фоновую плазму) и сверхтепловую. Фоновая плазма описывается обычными макроскопическими уравнениями, в которые следует добавить потоки частиц, тепловые и другие, обусловленные конвективным переносом надтепловой компоненты. Эти потоки носят существенно нелокальный характер в отличие от обычных диффузионных потоков. Конвективные потоки сверхтепловых частиц зависят от их функций распределения. Последние определяются решением соответствующих кинетических уравнений. Оператор соударений в этих уравнениях можно линейризовать и существенно упростить. Коэффициенты в таком линейризованном уравнении зависят от распределения по объему токамака полей и макроскопических параметров (моментов) фоновой плазмы. Таким образом, полное и самосогласованное описание плазмы следует проводить путем совместного решения макроскопических уравнений для моментов фоновой плазмы и линейризованного кинетического уравнения для надтепловых частиц.

Кинетическое уравнение для надтепловых частиц, которое в замкнутой плазме токамака превращается в дрейфово-кинетическое, далее упрощается в условиях большой длины свободного пробега сверхтепловых частиц вдоль магнитного поля В. Имеются в виду условия так называемого бананового режима, который для быстрых частиц осуществляется гораздо легче, чем для основной (фоновой) плазмы. Это позволяет разделить все надтепловые частицы на пролетные, банановые и локально-запертые и произвести в кинетическом уравнении усреднение по магнитной поверхности. При этом функция распределения пролетных и банановых частиц оказывается зависящей от четырех переменных: полной энергии частиц  $\mathcal{E}$ , их магнитного момента  $\mu$ , координаты, характеризующей магнитную поверхность,  $\eta$  и времени  $t$ . Эту функцию распределения следует находить, решая соответствующее усредненное уравнение вместе с кинетическим уравнением для локально-запер-

тых частиц (последние в стационарном случае зависят только от двух переменных). Система взаимосвязанных кинетических уравнений (уравнений ККП) и необходимые граничные условия получены в гл. 2. Там же проведено упрощение этих уравнений для тонкого токамака в отсутствие радиальных электрических полей и для простейшего случая вертикально-однородной гофрировки. В последнем случае кинетическое уравнение для локально-запертых частиц допускает аналитическое решение, в итоге система зацепляющихся уравнений ККП сводится к одному интегродифференциальному уравнению для функций распределения банановых и пролетных частиц.

Следует подчеркнуть, что значительное искажение функций распределения частиц в плазме вызывает не только конвективный перенос частиц в гофрах, но и целый ряд других процессов: действие постоянного электрического поля [18—24], флуктуации электрического и магнитного полей и обусловленный ими аномальный теплоперенос [28, 29], нагрев плазмы нейтралами перезарядки, СВЧ, ОНЧ и другим излучением [7] и ряд других процессов. Все они протекают в реальном магнитном поле и неоднородной плазме токамака и поэтому могут описываться на основе полученных здесь кинетических уравнений.

В гл. 3 приводятся некоторые результаты как аналитических, так и численных решений уравнений ККП. Эти результаты, часть которых была качественно описана выше, позволяют получить представление о характере возникающих искажений функций распределения и об эффективности кинетической конвекции с точки зрения глобального переноса в токамаке частиц и энергии.

Основное содержание настоящей статьи излагается по материалам работ [4, 12—16, 22]. Следует отметить, что в настоящее время применяется и другой подход к описанию процессов конвективного переноса в плазме, основанный на методе численного статистического моделирования (метод Монте-Карло) [30—33]. Этот подход, основанный на использовании в расчетах конечного числа пробных частиц, с удовлетворительной точностью описывает основную (тепловую) плазму и гораздо хуже надтепловые частицы. В то же время последовательный кинетический подход, развитый в настоящей работе, лучше всего применим именно к надтепловым частицам. Поэтому оба эти подхода взаимно дополняют друг друга.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 2.1. Исходное кинетическое уравнение. Оператор соударений

Данная глава посвящена выводу упрощенных кинетических уравнений, описывающих поведение надтепловых частиц в токамаке. Необходимость упрощения уравнений связана с тем, что для описания рассматриваемого здесь процесса конвективного пере-

носа приходится одновременно учитывать особенности реальной геометрии магнитного поля в токамаке и столкновения частиц. Вместе с тем исходное кинетическое уравнение с полным оператором соударений весьма сложно по своей структуре и зависит, не считая времени  $t$ , от шести переменных — трех пространственных координат и трех компонент скорости. Численное решение такого уравнения с учетом тонкостей магнитной геометрии и соударений представляет значительные трудности. С другой стороны, наличие ряда малых параметров и использование конкретных особенностей геометрии токамаков позволяет сильно упростить исходное кинетическое уравнение. Получение упрощенных кинетических уравнений, которые описывали бы рассматриваемый процесс с достаточной точностью, обладая вместе с тем минимально возможным числом переменных, является целью настоящей главы.

Кинетическое уравнение для функции распределения  $f_\alpha(t, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)$  заряженных частиц сорта  $\alpha$  в плазме имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = St_\alpha \{f_\alpha\} + Q_\alpha. \quad (2.1)$$

Здесь  $e_\alpha, m_\alpha$  — заряд и масса частицы сорта  $\alpha$ . Величина  $Q_\alpha$  в правой части (2.1) включает в себя различные виды источников или стоков частиц (связанных, например, с ионизацией или перезарядкой). Величина  $St_\alpha \{f_\alpha\}$  — это оператор соударений, учитывающий парные соударения частиц сорта  $\alpha$  с прочими частицами (включая частицы того же сорта  $\alpha$ ):

$$St_\alpha \{f_\alpha\} = \sum_\beta St_{\alpha,\beta} \{f_\alpha, f_\beta\}.$$

Суммирование здесь ведется по всем сортам сталкивающихся частиц  $\beta$ .

Для полностью ионизованной плазмы используется оператор кулоновских соударений Ландау [34], учитывающий только соударения с малым относительным изменением импульса и имеющий вид дивергенции потока в пространстве скоростей:

$$\left. \begin{aligned} St_{\alpha,\beta} \{f_\alpha, f_\beta\} &= \operatorname{div}_{\mathbf{v}} \mathbf{J}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial}{\partial v_{\alpha,i}} (\mathbf{J}_{\alpha,\beta})_i; \\ (\mathbf{J}_{\alpha,\beta})_i &= \frac{2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln \Lambda}{m_\alpha} \int \left( \frac{f_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha,k}} - \frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta}{\partial v_{\beta,k}} \right) U_{ik} d^3 \mathbf{v}_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Здесь индексами  $\alpha, \beta$  отмечены различные сорта частиц, а  $i, k$  — разные компоненты в пространстве скоростей; интегрирование в (2.2) проводится по всему пространству скоростей частиц сорта  $\beta$ ,

$$\begin{aligned} d^3 \mathbf{v}_\beta &= dv_{\beta,x} dv_{\beta,y} dv_{\beta,z}, \quad f_\beta = f_\beta(t, \mathbf{v}_\beta, \mathbf{r}_\beta); \\ U_{ik} &= \frac{\partial^2 u}{\partial v_{\alpha,i} \partial v_{\alpha,k}} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial v_{\beta,i} \partial v_{\beta,k}} = \frac{\delta_{ik}}{u} - \frac{u_i u_k}{u^3}; \\ \mathbf{u} &= |\mathbf{u}|; \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta; \end{aligned}$$

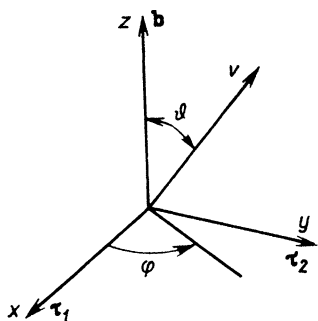


Рис. 6. Сферическая система координат  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  в пространстве скоростей

ной массой тепловых частиц. Это позволяет, следуя [19], линеаризовать оператор соударений для быстрых частиц сорта  $\alpha$ , а в качестве функций распределения частиц сорта  $\beta$  использовать максвелловские функции распределения с заданными концентрацией  $n_\beta$  и температурой  $T_\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} f_\beta \approx f_{\beta M} &= n_\beta \left( \frac{m_\beta}{2\pi T_\beta} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{v_\beta^2}{v_{T\beta}^2} \right); \\ v_{T\beta} &= (2T_\beta/m_\beta)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Поскольку эти функции распределения изотропны в пространстве скоростей, то расчет потока  $J_{\alpha, \beta}$  достаточно прост, он подробно изложен, например, в книге [7]. Поэтому приведем сразу окончательные выражения для линеаризованного оператора соударений  $St_\alpha \{f_\alpha\}$  в сферической системе координат в пространстве скоростей  $v_\alpha$  (рис. 6, индекс  $\alpha$  в величинах  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  для простоты опускаем):

$$St_\alpha \{f_\alpha\} = \frac{1}{v^2} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (v^2 I_v^\alpha) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta I_\vartheta^\alpha) + \frac{\partial^2 I_\varphi^\alpha}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (2.4a)$$

Будем в дальнейшем предполагать, что в плазме, помимо электронов с массой  $m$  и зарядом  $-e$ , имеются несколько сортов различных ионов с массами  $m_\alpha$  и зарядами  $e_\alpha = Z_\alpha e$ . Тогда для электронов имеем

$$I_v^e = v_e(v) \left( v f_e + \frac{T_e}{m} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} \right); \quad (2.5)$$

$$I_\vartheta^e = \frac{v_e(v)}{2} \left[ 1 + Z_{et} - \frac{1}{2} \left( \frac{v_{Te}}{v} \right)^2 \right] \frac{\partial f}{\partial \vartheta}; \quad (2.6)$$

ln  $\Lambda$  — кулоновский логарифм; по дважды повторяющимся латинским индексам  $k$  в (2.2) производится суммирование.

Будем в дальнейшем рассматривать только надтепловые частицы

$$v_\alpha^2 \gg v_{T\alpha}^2 = 2T_\alpha/m_\alpha. \quad (2.3)$$

Их относительное число можно считать экспоненциально малым. Будем также предполагать, что возмущения функции распределения частиц в области тепловых скоростей  $v_\alpha \leq v_{T\alpha}$  являются слабыми. В этих условиях соударениями надтепловых частиц между собой обычно можно пренебречь по сравнению с их соударениями с основ-

$$I_{\Phi}^e = \frac{v_e(v)}{2} \left[ 1 + Z_{ef} - \frac{1}{2} \left( \frac{v_{Te}}{v} \right)^2 \right] \frac{\partial f}{\partial \Phi}, \quad (2.7)$$

где

$$v_e = 4\pi n e^4 \ln \Lambda / (m^2 v^3) \quad (2.8)$$

— частота соударений быстрого электрона (2.3) с тепловыми, а

$$Z_{ef} = \frac{1}{n} \sum_n n_{\alpha} Z_{\alpha}^2 \quad (2.9)$$

— эффективный заряд ионов плазмы [суммирование в (2.9) ведется по всем сортам ионов  $\alpha$  с концентрациями  $n_{\alpha}$ ,  $n = \sum_{\alpha} n_{\alpha}$ ].

В (2.6), (2.7) оставлен член первого порядка малости по  $(v_{Te}/v)^2$ .

Аналогично для ионов сорта  $\alpha$  имеем

$$I_{\Phi}^{\alpha} = I_{\Phi}^{\alpha i} + I_{\Phi}^{\alpha e}; \quad (2.10)$$

$$I_{\Phi}^{\alpha i} = \left( \bar{Z}_1 v f + \bar{Z}_2 \frac{T_e}{m_{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial v} \right) v_{\alpha}(v); \quad (2.11)$$

$$I_{\Phi}^{\alpha e} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{v^3}{v_{T\alpha}^2 v_{Te}} \frac{T_{\alpha}}{T_e} \left( v f + \frac{T_e}{m_{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial v} \right) v_{\alpha}(v); \quad (2.12)$$

$$I_{\Phi}^{\alpha} = I_{\Phi}^{\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial \Phi} / \frac{\partial f}{\partial \Phi} \right) = \frac{v_e(v)}{2} \left[ Z_{ef} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{v}{v_{Te}} - \frac{\bar{Z}_3}{2} \frac{m_e}{m_{\alpha}} \left( \frac{v_{Te}}{v} \right)^2 \right] \frac{\partial f}{\partial \Phi}; \quad (2.13)$$

$$v_{\alpha}(v) = \frac{4\pi n e^4 \ln \Lambda}{m_{\alpha}^2 v^3} Z_{\alpha}^2; \quad (2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_1 &= \frac{m_{\alpha}}{n} \sum_i \frac{Z_i^2 n_i}{m_i}; & \bar{Z}_2 &= \frac{m_{\alpha}}{n T_e} \sum_i \frac{Z_i^2 n_i T_i}{m_i}; \\ \bar{Z}_3 &= \frac{1}{n T_e} \sum_i Z_i^2 n_i T_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

При получении (2.10)—(2.13) предполагалось, что скорость ионов удовлетворяет условию

$$v_{T\alpha}^2 < v^2 < v_{Te}^2. \quad (2.16)$$

При этом в (2.13) оставлены члены первого порядка малости по  $(v_{T\alpha}/v)^2$  и  $(v/v_{Te})$ . Всюду в (2.5)—(2.13) отброшены экспоненциально малые слагаемые и слагаемые порядка  $(m/m_{\alpha})$ .

Отметим, что в этом приближении изменение абсолютного значения скорости быстрых электронов обусловлено только их соударениями с тепловыми электронами, соударения же с ионами вно-

сят вклад лишь в рассеяние электронов по углам [см. слагаемое, пропорциональное  $Z_{ef}$  в формуле (2.13)].

Для надтепловых ионов их соударения с электронами несущественны при условии, что скорость ионов  $v$  удовлетворяет неравенству

$$v < v_{Te}^{1/3} v_{T\alpha}^{2/3} \sim v_{T\alpha} (m_{\alpha}/m)^{1/6}, \quad (2.17)$$

так что мало слагаемое  $I_v^{ae}$  (2.12). При больших скоростях ионов это условие нарушается, и соударения с электронами начинают играть заметную роль в изменении энергии быстрых ионов. При условии (2.17) основной вклад в рассеяние быстрых ионов по углам вносят соударения с тепловыми ионами [см. слагаемое, пропорциональное  $Z_{ef}$  в формуле (2.13)]. Если же скорость быстрых ионов превышает скорость тепловых электронов [т. е. нарушается одно из неравенств (2.17)], то следует использовать более сложные выражения, описываемые функциями Чандрасекара [7].

## 2.2. Дрейфово-кинетическое уравнение

Плазма токамака является сильно замагниченной для частиц любого сорта

$$\omega_{B\alpha}\tau \ll 1, \quad v_{\alpha}/\omega_{B\alpha} \ll 1, \quad \rho_{B\alpha}/L_{\perp} \ll 1, \quad (2.18)$$

где  $\omega_{B\alpha} = |e_{\alpha}|B/(m_{\alpha}c)$ ,  $\rho_{B\alpha} = v_{\alpha}/\omega_{B\alpha}$  — соответственно гирочастота и гидрорадиус частиц сорта  $\alpha$ ;  $L_{\perp}$ ,  $\tau$  — характерные пространственный и временной масштабы изменения макроскопических величин в плазме. Кроме того, для быстрых частиц обычно выполняется условие

$$c \frac{E_{\perp}}{B} \ll v_{\alpha}, \quad (2.19)$$

где  $E_{\perp}$  — ортогональная к  $\mathbf{B}$  компонента вектора электрического поля. При этих условиях за характерное время изменения параметров среды  $\tau$  или за время между соударениями частиц  $\sim v_{\alpha}^{-1}$  они успевают совершить большое число ларморовских оборотов вокруг силовой линии магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Поэтому функция распределения  $f_{\alpha}$  оказывается практически аксиально-симметричной относительно направления магнитного поля  $\mathbf{B}$ , т. е. слабо зависящей от аксиального угла  $\varphi$  в пространстве скоростей. При этом удобно перейти к новым переменным в пространстве скоростей  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$ ,  $\varphi$ , где

$$\mathcal{E} = \frac{m_{\alpha}v^2}{2} + e_{\alpha}\Phi(t, \mathbf{r}); \quad (2.20)$$

$$\mu = \frac{m_{\alpha}v_{\perp}^2}{2B(\mathbf{r}, t)} \quad (2.21)$$

представляют собой полную энергию и магнитный момент лармовского кружка, а

$$\left. \begin{aligned} v_{\perp}^2 &= v^2 - v_{\parallel}^2; \quad v_{\parallel} = (\mathbf{vb}); \quad \mathbf{b} = \mathbf{B}/B; \\ (\mathbf{v}_{\perp})_x &= v_{\perp} \cos \varphi, \quad (\mathbf{v}_{\perp})_y = v_{\perp} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

В этих переменных дрейфово-кинетическое уравнение для основной (аксиально-симметричной) части функции распределения  $f_0(t, \mathbf{r}, \mathcal{E}, \mu)$  имеет вид [35—37]

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = Q + \langle \text{St}_{\alpha}(f_0) \rangle_{\varphi}, \quad (2.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \langle \dots \rangle_{\varphi} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\varphi; \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\text{др}}; \quad \mathbf{v}_{\text{др}} = \frac{[\mathbf{G} \times \mathbf{b}]}{m_{\alpha} \omega_{B\alpha}}; \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{\partial \Psi_{\alpha}}{\partial t} + e_{\alpha} \mathbf{E}_{\text{инд}} \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad \Psi_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mu) = e_{\alpha} \Phi + \mu B; \\ \mathbf{G} &= e_{\alpha} \mathbf{E}_{\text{инд}} - \nabla \Psi_{\alpha} - m v_{\parallel}^2 (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b}; \quad d\mu/dt = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Здесь  $\Psi_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mu)$  — эффективный потенциал продольного движения частиц;  $\mathbf{E}_{\text{инд}}$  — индукционная (вихревая) часть полного электрического поля  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{инд}} - \nabla \Phi(t, \mathbf{r}). \quad (2.25)$$

Равенства (2.24) представляют собой уравнения дрейфового движения [10, 38, 39] в приближении слабого электрического поля (2.19). Усреднение по  $\varphi$  в операторе соударений  $\langle \text{St}_{\alpha}\{f_0\} \rangle_{\varphi}$  приводит просто к уничтожению члена  $\partial l_{\varphi} / \partial \varphi$ , поскольку угол  $\varphi$  больше нигде в операторе соударений не встречается. Здесь остается неучтенным эффект классической диффузии быстрых частиц поперек магнитного поля, связанной с соударениями. Для корректного описания данного эффекта при произвольных соотношениях между дебаевским радиусом частиц  $r_D$  и лармовским радиусом  $r_{V\alpha}$  следует учитывать влияние магнитного поля непосредственно на процесс кулоновских соударений (см., например, [40]). Этот эффект в токамаке для быстрых частиц обычно мал по сравнению с процессами переноса, обусловленными дрейфом, и поэтому мы его здесь рассматривать не будем. Заметим также, что источник  $Q$  в (2.23) считается аксиально-симметричным относительно направления магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Если же величина зависит от  $\varphi$ , то в кинетическом уравнении появятся дополнительные члены, которые легко выписываются на основе общих выражений (П2.31), (П2.33) (приложение П2). Последовательный вывод уравнения (2.23), основанный на процедуре усреднения по периодической переменной, описан в приложениях П2 и П3.

Величина  $f_0$  представляет собой функцию распределения центров ларморовских орбит частиц; она не зависит от  $\varphi$ . Однако в ряде случаев, например при вычислении потоков поперек магнитного поля, необходимо знать истинную функцию распределения частиц, учитывающую слабую зависимость от аксиального угла  $\varphi$ . С точностью до членов первого порядка малости по  $(\rho_{B\alpha}/L_{\perp})$ ,  $(v_{dr}/v)$  эта функция распределения имеет вид

$$f(t, \mathbf{r}, \mathcal{E}, \mu, \varphi) \approx f_0 + \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{b}]}{\omega_{B\alpha}} \left( \nabla f_0 + e_{\alpha} \mathbf{E}_{\text{инд}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} + \frac{\mathbf{G}}{B} \frac{\partial f_0}{\partial \mu} \right) \approx \\ \approx f_0 \left( t, \mathbf{r} + \frac{[\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{b}]}{\omega_{B\alpha}}, \mathcal{E} - \frac{m_{\alpha} c}{B} \mathbf{v}_{\perp} [\mathbf{E}_{\text{инд}} \times \mathbf{b}], \mu - \frac{m_{\alpha} \mathbf{v}_{\perp} \mathbf{v}_{dr}}{B} \right). \quad (2.26)$$

Последнее выражение имеет простую физическую интерпретацию. Оно описывает разницу мгновенных положений частиц и центра их ларморовской орбиты при учете конечного значения ларморовского радиуса. Кроме того, здесь содержится разница истинных и усредненных значений полной энергии и магнитного момента, связанная с учетом конечного значения скорости дрейфа.

Итак, для нахождения функции распределения частиц достаточно знать усредненную функцию распределения центров их ларморовских орбит  $f_0$ , по которой истинная функция легко восстанавливается (2.26). В дальнейшем индекс 0 у усредненной функции будет опускаться. Отметим, что в (2.26)

$$\mathbf{v}_{\perp} = v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \varphi + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \varphi),$$

где  $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{b})$  образуют правовинтовую тройку взаимно ортогональных единичных векторов (рис. 6), а величины  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$  (2.22) считаются функциями  $t, \mathbf{r}, \mathcal{E}, \mu$ :

$$v_{\perp}(t, \mathbf{r}, \mu) = \left[ \frac{2B(t, \mathbf{r})}{m_{\alpha}} \mu \right]^{1/2}; \quad (2.27)$$

$$v_{\parallel}(t, \mathbf{r}, \mathcal{E}, \mu) = \pm \left[ \frac{2}{m_{\alpha}} (\mathcal{E} - \Psi_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mu)) \right]^{1/2}. \quad (2.28)$$

Учитывая (2.24) — (2.28) и совершая консервативные преобразования (приложение П1), приведем дрейфово-кинетическое уравнение (2.23) для ионов сорта  $\alpha$  к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{I}_t + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{I}_r + \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \tilde{I}_{\mathcal{E}} + \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{I}_{\mu} = \tilde{I}_Q; \quad (2.29)$$

$$\tilde{I}_t = \frac{2\pi B}{m_{\alpha}^2 |v_{\parallel}|} f_0; \quad \tilde{I}_Q = \frac{2\pi B}{m_{\alpha}^2 |v_{\parallel}|} Q; \quad (2.30)$$

$$\tilde{I}_r \equiv I_t \frac{d\mathbf{r}}{dt} \approx \frac{2\pi}{m_{\alpha}^2} \left\{ \pm \mathbf{B} + \frac{m_{\alpha} c}{e_{\alpha}} \text{rot}(|v_{\parallel}| \mathbf{b}) + \frac{c}{|v_{\parallel}|} [\mathbf{E}_{\text{инд}} \cdot \mathbf{b}] \right\} f_0; \quad (2.31)$$

$$\tilde{I}_{\mathcal{E}} = \frac{2\pi}{m_{\alpha}^2} \left\{ \frac{B}{|v_{\parallel}|} \frac{d\Psi_{\alpha}}{dt} \pm e_{\alpha} (\mathbf{E}_{\text{инд}} \cdot \mathbf{B}) + \right.$$



$$+ m_\alpha c (\mathbf{E}_{\text{инд}} \cdot \text{rot} ( | v_{\parallel} | \mathbf{b} )) - \frac{\lambda Z_\alpha^2 B \hat{F}}{| v_{\parallel} | \sqrt{2 \mathcal{K} m_\alpha}} \left. \right\} f_0; \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\mu = & - \frac{2\pi\lambda Z_\alpha^2 \mu}{m_\alpha^2 | v_{\parallel} | \mathcal{K} \sqrt{2 \mathcal{K} m_\alpha}} \left[ B \hat{F} + \left( Z_{\text{ef}} - \frac{T_e}{2 \mathcal{K}} \tilde{Z}_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{3 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\mathcal{K} m_e}{T_e m_\alpha}} \right) (\mathcal{G} - \Psi_\alpha) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] f_0; \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{F} = & Z_1 + T_e \tilde{Z}_2 \hat{D} + \frac{4}{3 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{m_\alpha}} \left( \frac{\mathcal{K}}{T_e} \right)^{1/2} (1 + T_e \hat{D}); \\ \hat{D} = & \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \frac{\mu}{\mathcal{K}} \frac{\partial}{\partial \mu}; \quad \lambda = 4\pi n e^4 \ln \Lambda; \quad \mathcal{K} = \mathcal{G} - e_\alpha \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Здесь  $\mathcal{K} = m_\alpha v^2/2$  — кинетическая энергия частиц, знаки  $\pm$  в (2.31), (2.32) отвечают двум разным направлениям движения частиц вдоль силовой линии  $\mathbf{B}$  (2.28).

Выражения (2.30) — (2.34) записаны для ионов с зарядом  $e_\alpha = Z_\alpha e$  и массой  $m_\alpha$ . Уравнения для электронов имеют аналогичный вид с заменой

$$\left. \begin{aligned} m_\alpha & \rightarrow m; \quad Z_\alpha \rightarrow (-1); \quad e_\alpha \rightarrow -e; \\ Z_{\text{ef}} - \frac{T_e}{2 \mathcal{K}} \tilde{Z}_2 + \frac{4}{3 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{m_\alpha}} \frac{\mathcal{K}}{T_e} & \rightarrow 1 + Z_{\text{ef}}; \\ \tilde{Z}_3 & \rightarrow 1, \quad \hat{F} \rightarrow 1 + T_e \hat{D}. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Величина  $I_t$  (2.30) представляет собой плотность частиц в единице фазового объема  $d \mathcal{G} d\mu d^3 r$ :  $dn = I_t d \mathcal{G} d\mu d^3 r$ . Для нахождения плотности частиц в единице пространственного объема  $d^3 r$  следует проинтегрировать  $I_t$  по допустимым интервалам изменения  $\mathcal{G}$  и  $\mu$  просуммировать вклады от частиц, движущихся в двух противоположных направлениях вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Величины  $I_{\mathcal{G}, \mu, r}$  (2.31) — (2.33) представляют собой плотности потока в фазовом пространстве, которые наряду с пространственными перемещениями и действиями внешних сил учитывают изменение скоростей быстрых частиц вследствие их соударений с основной массой тепловых частиц. Величина  $I_Q$  (2.30) представляет собой плотность внешних источников (стоков) частиц, проинтегрированную по углу  $\varphi$ .

Следует подчеркнуть, что величина  $I = I_t (dr/dt)$  (2.31) представляет собой пространственный поток ведущих центров ларморовских орбит (см. приложение ПЗ). Истинный же поток частиц может существенно отличаться от данной величины. Например, в неоднородном магнитном поле всегда имеется конечный дрейфовый поток ведущих центров, тогда как истинный поток частиц в отсутствие градиентов плотности и электрических полей равен ну-

лю [41]. Приведем поэтому выражение для истинной плотности пространственного потока частиц (см. приложения П2 и П3):

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\text{ист}} = \tilde{I}_{\Gamma} - \frac{c}{e_{\alpha}} \operatorname{rot} (\mu \tilde{I}_{\Gamma} \mathbf{b}) - \frac{\partial}{\partial g} (\mu \tilde{I}_{\Gamma} c [\mathbf{E}_{\text{инд}} \times \mathbf{b}]) - \\ - \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\mu c}{e_{\alpha} B} [\mathbf{G} \times \mathbf{b}] \tilde{I}_{\Gamma} \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Второе слагаемое — это известный ток «намагничивания» в модели вращающихся ларморовских кружков [37, 40]. Последние два слагаемых в (2.36) — это дополнительные компоненты пятимерного «ротора» в фазовом пространстве  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$ ,  $g$ , обеспечивающие равенство нулю соответствующей пятимерной «дивергенции» [см. уравнение (2.29)]. Вклад в полный поток частиц они не вносят, так как обращаются в нуль после интегрирования по  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$ .

### 2.3. Система криволинейных координат

Дальнейшее упрощение кинетических уравнений состоит в усреднении по двум пространственным переменным. Прежде чем переходить к этой процедуре, опишем систему координат, которой будем пользоваться в дальнейшем, и приведем несколько полезных формул.

Рассмотрим тороидальную плазменную конфигурацию достаточно общего вида (рис. 7). Пусть  $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  — тороидальные координаты, где  $\theta$  и  $\varphi$  — соответственно полоидальный и тороидальный углы, а  $\eta$  — любая величина, характеризующая данную магнитную поверхность и обращающаяся в нуль на магнитной оси; например, в тонком токамаке (т. е. с большим аспектным отношением) в качестве  $\eta$  берется малый радиус магнитной поверхности  $\rho$ . Введем теперь вместо  $\varphi$  новую координату  $\zeta$ :

$$\zeta = \theta - \int_0^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{q(\eta, \theta(\tilde{\varphi}))}. \quad (2.37)$$

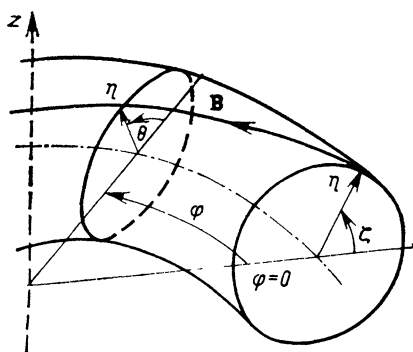


Рис. 7. Система координат  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\theta$ , связанная с магнитными силовыми линиями в токамаке (показана часть тора). Здесь  $\theta$ ,  $\zeta$  — полоидальные углы,  $\varphi$  — тороидальный угол (не путать с аксиальным углом  $\varphi$  в пространстве скоростей частиц)

Интегрирование здесь ведется по тороидальному углу вдоль магнитной силовой линии:  $\theta = \theta(\varphi)$ ,  $\eta = \text{const}$ . Координата  $\zeta$  имеет смысл полоидального угла данной силовой линии в точке ее пересечения с вертикальной плоскостью  $\varphi = 0$ . Такое определение  $\zeta$  неоднозначно, поскольку силовая линия много раз пересекает плоскость  $\varphi = 0$ . Чтобы устранить эту неоднозначность, расширим определение величины  $\theta$ . Условимся считать, что каждое новое вращательное преобразование силовой линии  $\mathbf{B}$  приводит к возрастанию координаты  $\theta$  на  $2\pi$ . Для определенности примем, что движение вдоль силовой линии по полю  $\mathbf{B}$  соответствует возрастанию  $\theta$ , против поля — убыванию. Поэтому под координатой  $\theta$  следует понимать не просто полоидальный угол (рис. 7), а полоидальный угол плюс «набег фазы»  $2\pi n$ , где число винтовых шагов силовой линии  $n$  — заданная величина. Этим автоматически устраняется неоднозначность в определении координаты  $\zeta$ .

Таким образом, на данной магнитной поверхности  $\eta = \text{const}$  величина  $\zeta$  определяет данную силовую линию, а  $\theta$  является текущей координатой вдоль нее. Систему криволинейных координат  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\theta$  и будем использовать в дальнейшем. Заметим, что при изменении координаты  $\zeta$  на  $2\pi$  совершается полный оборот вокруг малой окружности тора, и мы возвращаемся на исходную силовую линию. Поэтому любые величины, являющиеся функциями координат  $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$ , периодичны по переменной  $\zeta$ :

$$A(\zeta, \eta, \theta) \equiv A(\zeta + 2\pi, \eta, \theta). \quad (2.38)$$

Этого, однако, нельзя сказать о координате  $\theta$ . Изменение ее на  $2\pi n$  равносильно изменению  $\zeta$  на величину  $\Delta\zeta$ , не равную в общем случае  $2\pi k$ , где  $k$  — целое число. Периодичность по  $\theta$  имеет место только на замкнутых силовых линиях или в условиях полной аксиальной симметрии.

В криволинейной системе координат  $\zeta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), где \*

$$\zeta_1 = \zeta(\mathbf{r}, t); \quad \zeta_2 = \eta(\mathbf{r}, t); \quad \zeta_3 = \theta(\mathbf{r}, t), \quad (2.39)$$

любой вектор следует характеризовать его ковариантными  $A_i$  или контравариантными  $A^i$  компонентами:

$$\mathbf{A} = A_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial \mathbf{r}} = A^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_i}; \quad A_i = G_{ik} A^k,$$

где  $G_{ik}$  — метрический тензор. Элементы объема и длины дуги записываются при этом в виде

$$\left. \begin{aligned} d^3\mathbf{r} &= \sqrt{G} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3; \\ dl &= (G_{ik} d\zeta_i d\zeta_k)^{1/2}; \\ G &= \det \| G_{ik} \|. \end{aligned} \right\} \quad (2.39a)$$

\* Зависимость от времени в координатах (2.39) может возникать в нестационарных случаях при адиабатически медленной перестройке геометрии магнитного поля.

В используемой здесь системе координат (2.39) для единичного вектора вдоль направления поля  $\mathbf{b} = \mathbf{V}/V$  имеем [38]

$$b^{(1)} = b^{(2)} = 0; \quad b^{(3)} = 1/b_{(3)} = 1/\sqrt{G_{33}}. \quad (2.40)$$

Элемент длины дуги вдоль силовой линии равен

$$dl = d\theta/b^{(3)} = \sqrt{G_{33}} d\theta. \quad (2.41)$$

Из уравнения Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{B \sqrt{G}}{\sqrt{G_{33}}} \right) = 0. \quad (2.42)$$

#### 2.4. Усреднение по продольному движению (запертые частицы)

Для использования метода усреднения, описанного в приложении П2, необходимо наличие быстрого периодического движения по одной переменной при адиабатически медленном изменении функции распределения и параметров среды по остальным. Существенным обстоятельством является то, что в сильно разогретой плазме тороидальных магнитных установок частицы совершают быстрое движение вдоль силовых линий магнитного поля. При этом за время одного колебания между магнитными пробками или в течение одного пролета по периоду вращательного преобразования силовой линии данная запертая или пролетная частица не успевает заметно изменить свою энергию  $\mathcal{E}$  или магнитный момент  $\mu$  и мало сдвигается поперек силовых линий магнитного поля. При этом такие факторы, как соударения, дрейф, вихревое электрическое поле и нестационарность внешних параметров среды, являются малыми возмущениями свободного движения частиц вдоль магнитного поля. Воздействие этих факторов усредняется по периоду продольного движения частиц, приводя к адиабатически медленному перемещению их поперек магнитного поля и такому же плавному изменению интегралов свободного движения частиц. В кинетическом описании это отвечает тому, что функция распределения частиц зависит в основном только от интегралов их свободного движения и местонахождения отрезка силовой линии  $\mathbf{V}$ , разрешенного для движения данных частиц. От конкретного места расположения частиц внутри этого отрезка функция распределения практически не зависит.

Движение частиц вдоль силовой линии  $\mathbf{V}$  описывается координатой  $\theta$ . Замкнутое продольное движение запертых частиц между магнитными пробками можно рассматривать как периодическое по  $\theta$ . Для пролетных же частиц в общем случае строгая периодичность по  $\theta$  отсутствует. Ниже (в § 2.6) показано, как обойти эту трудность.

Вначале проведем усреднение по  $\theta$  только для запертых частиц. Условия применимости этого усреднения рассмотрены в § 2.12. Здесь же кратко опишем саму процедуру. Согласно методу

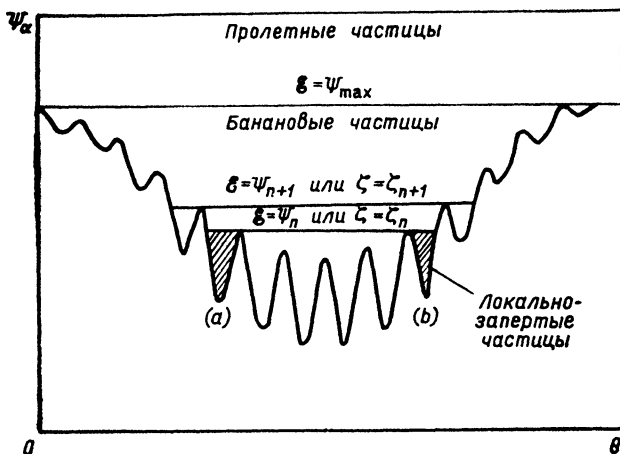


Рис. 8. Пример изменения эффективного потенциала  $\Psi_\alpha = e_\alpha \Phi + \mu B$  (2.24) вдоль данной силовой линии. Показаны сепаратрисы, разделяющие области движения пролетных и банановых частиц ( $\mathcal{E} = \Psi_{\max}$ ), а также банановых и локально-запертых ( $\mathcal{E} = \Psi_n$ ,  $\mathcal{E} = \Psi_{n+1}$ )

усреднения функцию распределения частиц можно представить в виде

$$f = f_0(t, \zeta, \eta, \mathcal{E}, \mu) H(\mathcal{E} - \Psi_\alpha(t, \zeta, \eta, \theta)) + f_1(t, \zeta, \eta, \theta, \mathcal{E}, \mu), \quad (2.43)$$

где

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

— ступенчатая функция Хевисайда, а  $f_1$  и любые ее производные по  $t, \zeta, \eta, \mathcal{E}, \mu$  считаются малыми по сравнению с  $f_0$  и соответствующими ее производными. Индекс 0 обозначает функцию распределения, усредненную по координате  $\theta$ . Величина  $(\mathcal{E} - \Psi_\alpha)$  в (2.43) соответствует согласно (2.28) «продольной» энергии частиц. Наличие ступенчатой функции выражает тот факт, что область разрешенного движения частиц (рис. 8)

$$\mathcal{E} \geq \Psi_\alpha(t, \zeta, \eta, \theta) \equiv e_\alpha \Phi + \mu B \quad (2.45)$$

является ограниченной. Вне этой области частицы отсутствуют, т. е. здесь  $f = 0$ . Таким образом, для запертых частиц

$$\mathcal{E} \leq \Psi_{\max}(t, \zeta, \eta, \mu), \quad (2.46)$$

где  $\Psi_{\max}$  — наибольший потенциальный барьер на данной силовой линии; зависимость от продольной координаты  $\theta$  входит в функцию распределения только ступенчатым образом (2.43), (2.44), величина же  $f_0$  от  $\theta$  не зависит. Кинетическое уравнение для функ-

ции  $f_0$  имеет общий вид

$$\frac{\partial I_t}{\partial t} + \frac{\partial I_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{E}} + \frac{\partial I_{\mu}}{\partial \mu} + \frac{\partial I_{\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial I_{\eta}}{\partial \eta} = I_Q, \quad (2.47)$$

где  $I_t, \mathcal{E}, \mu, \zeta, \eta, Q$  представляют собой плотности числа частиц и их потоков по различным переменным, усредненные по координате  $\theta$ . Вывод уравнения (2.47) и конкретные выражения для потоков приведены в приложении П4.

Имеются различные группы запертых частиц, области движения которых разделены сепаратрисами, т. е. поверхностями в пространстве  $t, \zeta, \eta, \mathcal{E}, \mu$ :

$$\mathcal{E} = \Psi_n(t, \mu, \zeta, \eta), \quad (2.48)$$

где  $\Psi_n$  —  $n$ -й локальный максимум эффективного потенциала, разделяющий две соседние потенциальные ямы на данной силовой линии  $\mathbf{B}$  (рис. 8). Сформулируем в общей форме граничные условия, связывающие решения кинетического уравнения в различных областях движения частиц. Прежде всего ясно, что функции распределения частиц, движущихся в одном направлении, не должны изменяться при переходе через сепаратрису (2.48):

$$f_0^{(1)}|_{\mathcal{E} < \Psi_n} = f_0|_{\mathcal{E} > \Psi_n} = f_0^{(2)}|_{\mathcal{E} < \Psi_n}, \quad (2.49)$$

где индексы (1), (2) относятся к двум потенциальным ямам, лежащим под сепаратрисой  $\mathcal{E} = \Psi_n$ . Второе граничное условие можно получить, исходя из закона сохранения числа частиц. Если считать, что вблизи сепаратрисы нет узко локализованных источников или стоков частиц, то должен сохраняться суммарный поток через единицу площади поверхности сепаратрисы, т. е.

$$R|_{\mathcal{E} > \Psi_n} = (R^{(1)} + R^{(2)})|_{\mathcal{E} < \Psi_n}, \quad (2.50)$$

где [см. (П1.14)]

$$R = I_i \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (2.51)$$

Здесь  $F(x_i)$  — функция, определяющая поверхность сепаратрисы:

$$F(x_i) = 0. \quad (2.52)$$

Определение (2.51) инвариантно относительно любых замен переменных и различных способов задания одной и той же поверхности. Соответствующие значения  $R$  при этом связаны консервативным преобразованием (П1.16) (приложение П1). В частном случае при  $F = \mathcal{E} - \Psi_n$  (2.48)

$$R = I_{\mathcal{E}} - I_{\mu} B_n - I_{\zeta} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \zeta} - I_{\eta} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \eta}, \quad (2.53)$$

где  $B_n$  — магнитная индукция в точке данного локального максимума  $\Psi_n$ . Обобщение граничных условий (2.49), (2.50) на случай

одновременного касания сепаратрисой двух (см. рис. 8) и более потенциальных горбов очевидно.

## 2.5. Сглаженная функция распределения банановых частиц

Уравнение (2.47) и граничные условия (2.49), (2.50) применимы для любых видов запертых частиц. Рассмотрим теперь отдельно банановые и локально-запертые частицы. Из рис. 8 видно, что область движения банановых частиц разделена многими сепаратрисами, тогда как области движения локально-запертых частиц целиком расположены «ниже» каждой из них. Отметим, что точное описание поведения банановых частиц на основе кинетического уравнения (2.47) крайне затруднительно, так как при этом необходимо решать такие уравнения для большого числа отдельных областей между сепаратрисами, сшивая соответствующие решения с помощью граничных условий.

Имеется, однако, одно благоприятное обстоятельство, позволяющее избежать этой громоздкой процедуры. Оно связано с тем, что дрейф в неоднородном магнитном поле токамака приводит к прецессии банановых траекторий частиц вдоль главной окружности тора [2, 3, 42]. Вслед за продольным движением именно дрейфовая прецессия оказывается наиболее «быстрым» движением банановых частиц. Она приводит к тому, что воздействие любых факторов, нарушающих аксиальную симметрию в токамаке, называется как бы «размазанным» («сглаженным») по данной магнитной поверхности. Поэтому и взаимодействие банановых частиц с дискретными гофрами является также сглаженным по распределению гофров в системе. В этих условиях аналогично тому, как это было сделано в § 2.2, 2.4, усредненную по продольному движению функцию распределения банановых частиц  $f_0$  (2.43) можно представить в виде основной части  $f_{00}$  и малого добавка  $f_{01}$

$$f_0 = f_{00}(t, \eta, \mathcal{E}, \mu) + f_{01}(t, \zeta, \eta, \mathcal{E}, \mu), \quad (2.54)$$

где  $f_{00}$  не зависит от положения силовой линии на данной магнитной поверхности  $\eta = \text{const}$ , т. е. не зависит от координаты  $\zeta$ . Учитывая периодичность любых величин по координате  $\zeta$  (2.38), можно получить кинетическое уравнение для сглаженной функции распределения банановых частиц  $f_{00}$ , которое уже не содержит переменной  $\zeta$ . Однако в условиях кинетического конвективного переноса в гофрах (ККП) это уравнение не будет замкнутым относительно функции распределения банановых частиц  $f_{00}$ , так как имеют место переходы из группы банановых частиц в группу локально-запертых частиц и наоборот. Поэтому в кинетическом уравнении для  $f_{00}$  возникнут дополнительные члены, учитывающие взаимодействие с локально-запертыми частицами.

В области энергий (2.46) сглаженное кинетическое уравнение для функции распределения банановых частиц (2.54), полученное

в приложении П5, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \langle I_i \rangle_{\zeta} + \sum_{n=1}^N [\langle I_i^L \rangle_{\zeta}^{(a)} - \langle I_i^L \rangle_{\zeta}^{(b)}] \right. \\ = \langle I_Q \rangle_{\zeta} + \sum_{n=1}^N [\langle I_Q^L \rangle_{\zeta}^{(a)} - \langle I_Q^L \rangle_{\zeta}^{(b)}]; \\ \left. \langle \dots \rangle_{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int (\dots) d\zeta. \right\} \quad (2.55) \end{aligned}$$

Здесь  $x_i$  — переменные  $t, \eta, \mathcal{E}, \mu$ ; величины  $I_i$  описывают компоненты вектора потока для банановых частиц, а  $I_i^L$  — аналогичные величины для локально-запертых частиц. Интегрирование по  $\zeta$  ведется от 0 до  $2\pi$  для банановых частиц и в интервале разрешенных значений  $\zeta$  (при данных  $x_i$ ) для локально-запертых частиц. Индексы  $(a), (b)$  относятся к двум различным половинам тора, зеркально-симметричным относительно экваториальной плоскости. Суммирование ведется по всем гофрам в системе. Если гофры одинаковы и распределены аксиально-симметрично, то суммирование по  $n$  сводится к простому умножению на полное число гофров  $N$ . Конкретные выражения для  $\langle I_{i,Q} \rangle_{\zeta}, \langle I_{i,Q}^L \rangle_{\zeta}$  даны ниже, в § 2.9.

В дальнейшем всюду ограничимся только основной, аксиально-симметричной частью функции распределения  $f_{00}(t, \eta, \mathcal{E}, \mu)$  (2.54). Если к тому же функцию распределения локально-запертых частиц  $f^L$  можно выразить через функцию распределения банановых частиц (см. ниже), то, подставив  $f^L$  в выражения для  $\langle I_i^L \rangle_{\zeta}$ , получим замкнутое кинетическое уравнение для  $f_{00}$ , сглаженное по распределению гофров в системе.

## 2.6. Пролетные частицы

Обратимся теперь к рассмотрению кинетики пролетных частиц

$$\mathcal{E} > \Psi_{\max}(t, \zeta, \eta, \mu). \quad (2.56)$$

Если пытаться проводить для них упрощение кинетических уравнений в той же последовательности, что и для банановых частиц, то, как указывалось выше, при усреднении по  $\theta$  возникает трудность, связанная с неперiodичностью этой координаты. Выход состоит в том, что усреднение по  $\theta$  и по  $\zeta$  следует проводить одновременно. Рассмотрим это подробнее.

Дрейфово-кинетическое уравнение для функции распределения пролетных частиц  $f^p(t, \zeta, \eta, \theta, \mathcal{E}, \mu)$  имеет вид

$$\frac{\partial I_{\theta}^p}{\partial \theta} + \frac{\partial I_{\zeta}^p}{\partial \zeta} + \frac{\partial I_i^p}{\partial x_i} = I_Q^p,$$

где  $x_i$  обозначены переменные  $t, \eta, \mathcal{E}, \mu$ . Проинтегрируем это уравнение по координате  $\theta$  от  $\theta_0 = \zeta$  до  $\theta_1 = \theta_0 + 2\pi$ . При этом полу-



$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_1} I_{\zeta}^p d\theta \right) + I_{\theta}^p|_{\theta_0+2\pi} - I_{\theta}^p|_{\theta_0} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\theta_0}^{\theta_1} I_i^p d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} I_Q^p d\theta. \quad (2.57)$$

Подстановки на концах отрезка интегрирования исчезнут только в вырожденных случаях (замкнутые силовые линии с  $m/n=1$  или полная аксиальная симметрия, см. приложение П4). В общем случае они остаются. Эти подстановки содержат произведение малой величины  $f_1$  (2.43) на «большую» скорость  $d\theta/dt$ , и они могут оказаться порядка осциллирующих частей в остальных членах уравнения (2.57), содержащих  $f_0$ . Поэтому в нулевом порядке теории возмущения не получается замкнутого уравнения для усредненной по  $\theta$  функции  $f_0(t, \zeta, \eta, \mathcal{E}, \mu)$ . Однако если теперь проинтегрировать уравнение (2.57) по координате  $\zeta$ , то подстановки на концах отрезка интегрирования сократятся [см. (2.38)] и получится уравнение, аналогичное (2.55), где, однако, будут отсутствовать слагаемые, связанные с локально-запертыми частицами. В нулевом порядке теории возмущений функция распределения пролетных частиц имеет вид

$$f^p \approx f_{00}^p(t, \eta, \mathcal{E}, \mu). \quad (2.58)$$

Существенным отличием пролетных частиц от запертых является то, что при равных значениях  $\mathcal{E}, \mu$  имеются две различные группы пролетных частиц: движущихся вдоль силовой линии в направлении поля  $\mathbf{V}$  и в противоположном направлении. Различия в их функциях распределения связано с тем, что при усреднении по  $\theta$  не исчезает слагаемое, описывающее ускорение (замедление) частиц продольным вихревым электрическим полем (см. приложение П4). Чтобы различать частицы, движущиеся в двух противоположных направлениях вдоль  $\mathbf{V}$ , будем помечать их знаком (+) («ускоряющиеся» частицы) и (-) («замедляющиеся» частицы). В отсутствие вихревого поля их функции распределения, так же как и функции распределения запертых частиц, равны между собой.

Следует заметить, что в аксиально-несимметричном торе области существования запертых и пролетных частиц разделены, строго говоря, не сепаратрисой, а пограничным слоем конечной толщины. «Уширение» сепаратрисы связано с колебаниями величины  $\Psi_{\max}$  при изменении координаты  $\zeta$  на  $2\pi l$ . В этом слое появляются запертые частицы, область разрешенного движения которых может составлять несколько периодов вращательного преобразования силовой линии. Именно они осуществляют обмен между банановыми и пролетными частицами. Толщина такого пограничного слоя обычно невелика, она может не превышать «естественной» толщины сепаратрисы, связанной с соударениями (см. § 2.12). Функция распределения частиц на толщине этого слоя изменяется мало, поэтому его также можно считать сепара-

трисной поверхностью  $\mathcal{E} = \Psi_{\max}$ , где зависимость от  $\zeta$  в  $\Psi_{\max}$  можно пренебречь. Граничные условия на переходном слое между пролетными и банановыми частицами имеют более общий вид, чем (2.49), (2.50), что связано с наличием двух групп пролетных частиц:

$$f^{(+)}|_{\mathcal{E} > \Psi_{\max}} = f|_{\mathcal{E} < \Psi_{\max}} = f^{(-)}|_{\mathcal{E} > \Psi_{\max}}; \quad (2.59)$$

$$(R^{(+)} + R^{(-)})|_{\mathcal{E} > \Psi_{\max}} = 2R|_{\mathcal{E} < \Psi_{\max}}. \quad (2.60)$$

Потоки  $R$  определены аналогично (2.53). Напомним, что интегрирование по  $\theta$  во всех величинах  $I_i$  для пролетных частиц ведется в интервале от  $\theta_0$  до  $\theta_0 + 2\pi$ .

## 2.7. Обсуждение упрощенных уравнений для банановых и пролетных частиц

Таким образом, получены упрощенные кинетические уравнения для функций распределения банановых и пролетных частиц, которые содержат всего четыре переменные: время  $t$ , полную энергию  $\mathcal{E}$ , магнитный момент  $\mu$  и одну пространственную координату  $\eta$ , характеризующую магнитную поверхность [координата  $\theta$  входит только в функцию распределения банановых частиц ступенчатым образом (2.43)]. Эти уравнения имеют близкий вид для обеих этих групп частиц. Разница состоит в том, что кинетическое уравнение для банановых частиц содержит члены, описывающие конвективный перенос локально-запертых частиц (рассматриваемые пока как внешний источник), и не содержит слагаемого, описывающего изменение энергии частиц под действием вихревого электрического поля. Функции распределения банановых частиц при равных значениях  $\eta$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$ , но с противоположными направлениями продольного движения одинаковы. Наоборот, соответствующие функции распределения пролетных частиц в общем случае различаются. Оба уравнения являются дифференциальными уравнениями в частных производных второй степени по  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$  и первой по  $\eta$ ,  $t$  (см. приложение П4). Их решения связаны двумя граничными условиями (2.59), (2.60) на разделяющей сепаратрисе  $\mathcal{E} = \Psi_{\max}(t, \mu, \eta)$ . Отметим, что специальных граничных условий при  $\mathcal{E} = \Psi_{\min}$  («дно» потенциальной ямы),  $\mu = 0$  (т. е.  $v = 0$ ) и  $\mathcal{E} = \infty$  не требуется (кроме требования ограниченности решений), так как здесь кинетические уравнения вырождаются в уравнения первого порядка по  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$ . Граничное условие по  $\mathcal{E}$  со стороны малых энергий заключается в том, что в области тепловых скоростей  $\mathcal{E} \sim T_\alpha$  решение кинетического уравнения для сверхтепловых частиц сорта  $\alpha$  должно сшиваться с функцией распределения соответствующих тепловых частиц, близкой к максвелловской функции (2.4). Такой подход полностью аналогичен применяемому в теории убегающих электронов [13, 19—24, 43]. Заметим, что конвективный перенос быстрых частиц и ускорение вихревым электрическим полем приводят к тому, что в отдельных областях фазового пространства

возникает поток из группы тепловых частиц в группу быстрых, а в других областях, наоборот, из группы быстрых частиц в группу тепловых. Возникает «конвекция» частиц в фазовом пространстве (см. гл. 3).

Выражения для коэффициентов в уравнениях для банановых и пролетных частиц получаются из (2.47) путем дополнительного усреднения по переменной  $\zeta$  (2.55). (Заметим, что усреднение по  $\theta$  и  $\zeta$  эквивалентно усреднению по магнитной поверхности.) В таком виде усредненные уравнения пригодны не только для токамаков, но и для других тороидальных установок (гофрированного тора,  $l$ -заходного стелларатора с достаточно большим значением  $l$ ). К сожалению, кинетическое уравнение для локально-запертых частиц при произвольной глубине гофрировки  $\Delta$  довольно сложное: в нем остаются производные по координате  $\zeta$ . Однако оно существенно упрощается для токамака с малой относительной глубиной гофрировки (см. § 2.8).

Заметим, что мы ограничились здесь нулевым порядком теории возмущения. При этом исключены из рассмотрения такие эффекты, как неоклассическая диффузия, дрейф банановых траекторий из-за влияния продольного электрического поля и др. [2, 3, 42]. Перенос, обусловленный влиянием гофрировки непосредственно на движение банановых частиц [44—48], в нашем рассмотрении мог бы быть учтен уже в нулевом порядке теории возмущений, если аккуратно выполнить усреднение по  $\zeta$  (2.55). Однако в целом все эти эффекты изучались во многих работах (см. обзоры [2, 3, 9, 42]), и они не составляют предмета нашего рассмотрения. Отметим, что при необходимости можно получить соответствующие им члены, пользуясь более общими усредненными кинетическими уравнениями (см. приложение П2).

## 2.8. Локально-запертые частицы

Рассмотрим поведение локально-запертых частиц в одном заданном гофре. Их энергия изменяется в интервале

$$\Psi_n - \delta\Psi_n^m \leq \mathcal{E} \leq \Psi_n, \quad (2.61)$$

где  $\Psi_n$  — меньший из максимумов эффективного потенциала  $\Psi_\alpha$  (2.24), ограничивающих локальную потенциальную яму данного гофра;  $\delta\Psi_n^m$  — глубина ямы (рис. 9). При условии (1.19)

$$\Delta \equiv \delta\Psi_n^m / \Psi_n \ll \varepsilon \leq 1 \quad (2.62)$$

допустимый интервал изменения энергии локально-запертых частиц в гофре значительно уже аналогичного интервала для банановых частиц. Кулоновские соударения не могут привести к существенному питч-угловому рассеянию локально-запертых частиц (для них  $\cos \theta \leq \sqrt{\Delta}$ ), поскольку при этом нарушилось бы условие (2.61) и частицы перестали бы оставаться локально-заперты-

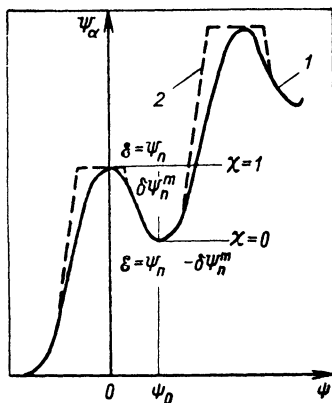


Рис. 9. Зависимость эффективного потенциала  $\Psi_\alpha$  в гофре от переменной  $\psi$  (2.70) (1) и параболическая аппроксимация (2.78) (2)

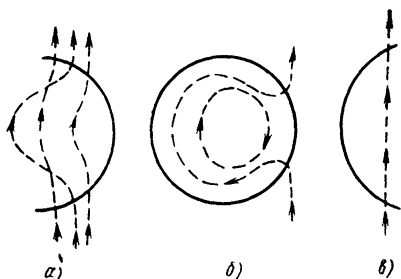


Рис. 10. Примеры дрейфовых траекторий локально-запертых частиц в поперечном сечении плазменного шнура

ми. Поэтому для таких частиц

$$\mathcal{E} \approx \Psi_n(t, \zeta, \eta, \mu) \approx \text{const}; \quad \mu \approx \text{const}. \quad (2.63)$$

Приближенные равенства (2.63) справедливы, если можно пренебречь влиянием индукционного электрического поля  $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ , возникающего из-за нестационарности напряженности магнитного поля  $\mathbf{B}$ ; соответствующие условия обсуждаются ниже (см. § 2.12). Будем предполагать, что они выполнены, и, следовательно, дрейфовая траектория движения локально-запертых частиц в координатах  $\zeta, \eta$  дается приближенными равенствами (2.63).

Если рассматривать частицы, локализованные внутри определенного гофра, то начальную плоскость  $\varphi = 0$  удобно поместить в его центр. Поскольку интервал тороидальных углов, занимаемых данным гофром, мал

$$\Delta\varphi \sim 2\pi/N \ll 2\pi, \quad (2.64)$$

то согласно (2.37)  $|\theta_2 - \theta_1| \ll 2\pi$ , и, следовательно,

$$\zeta \approx \theta_1 \approx \theta_2. \quad (2.65)$$

Здесь  $\theta_{1,2}$  — полоидальные углы точек поворота коротких скачковых траекторий локально-запертых частиц вдоль силовой линии  $\mathbf{B}$ . Приближенное равенство (2.65) означает, что, несмотря на осцилляции вдоль  $\mathbf{B}$ , положение локально-запертой частицы в поперечном сечении плазменного шнура можно охарактеризовать координатой  $\eta$  и единым полоидальным углом  $\theta \approx \zeta$ .

Если следить только за дрейфовой траекторией локально-запертых частиц, то при условии (2.62) можно не делать различий между реальными значениями величин  $\Phi, B, \Psi_\alpha = e_\alpha \Phi + \mu B$  (2.24)

и теми их значениями, которые были бы в отсутствие гофрировки. При этом величины  $\Phi$ ,  $B$ ,  $\Psi_\alpha$  аксиально-симметричны и не зависят от конкретного расположения данного гофра вдоль окружности тора. При наличии радиального электрического поля ( $-\nabla\Phi$ ) дрейфовые траектории локально-запертых частиц (2.63) бывают как конечными, так и замкнутыми (рис. 10). В отсутствие электрического поля (или для частиц достаточно большой энергии) они вырождаются в вертикальные прямые  $B(\eta, \zeta) = \text{const}$  (рис. 10, в).

Обратимся теперь к кинетическому уравнению для локально-запертых частиц. Важным обстоятельством является то, что хотя интервал допустимых значений  $\mathcal{E}$  для локально-запертых частиц узок (2.61), (2.62), их функция распределения может изменяться в нем достаточно резко. Например, на сепаратрисе

$$\mathcal{E} = \Psi_n \quad (2.66)$$

она равна функции распределения банановых частиц (2.49), тогда как у «дна» локальной потенциальной ямы

$$\mathcal{E} = \Psi_n - \delta\Psi_n^m \quad (2.67)$$

она может оказаться близкой к нулю (см. § 3.5). Введем вместо  $\mathcal{E}$  новую переменную  $\chi$ , которая изменяется от нуля на «дне» ямы (2.67) до единицы на разделяющей сепаратрисе (2.66):

$$\chi = \int \Omega d\psi / \int \Omega_m d\psi. \quad (2.68)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \left[ \frac{\delta\Psi_n - (\Psi_n - \mathcal{E})}{\delta\Psi_n^m} \right]^{1/2}; \\ \Omega &= \Omega|_{\mathcal{E}=\Psi_n} = \left( \frac{\delta\Psi_n}{\delta\Psi_n^m} \right)^{1/2}; \\ \delta\Psi_n &= \Psi_n - \Psi_\alpha(\zeta, \eta, \theta(\psi)); \\ \psi &= (\theta - \theta_p) Nq; \\ \Psi_n &= \Psi_\alpha(\zeta, \eta, \theta_p); \quad q = \frac{d\psi}{d\theta} \Big|_{\substack{\zeta=\text{const} \\ \eta=\text{const}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

Интегрирование в (2.68) ведется вдоль фиксированной силовой линии между нулями подынтегральных выражений, причем вместо координаты  $\theta$  введена для удобства другая переменная,  $\psi$ , отсчитываемая от максимума потенциального горба  $\theta = \theta_p$  (см. рис. 9). Нормировка  $\psi$  выбрана таким образом, чтобы на длине одного гофра было  $\psi \sim 1$  ( $d\psi = Nd\varphi$ , где  $\varphi$  — тороидальный угол). Функция  $\delta\Psi_n(\psi)$  описывает изменение эффективного потенциала при перемещении вдоль силовой линии внутри потенциальной ямы. Эта функция учитывает как гофрировку магнитного поля, так и

регулярное изменение  $\Psi_\alpha$ , связанное с винтовым кручением магнитной силовой линии (см. § 1.1, 3.1). Максимальное значение  $\delta\Psi_n(\psi)$  равно глубине потенциальной ямы  $\delta\Psi_n^m$ . Отметим, что малые изменения напряженности магнитного поля, обусловленные гофрировкой, учитываются только при вычислении величин  $\Omega$ ,  $\Omega_m$  (2.69). Во всех остальных случаях эффективный потенциал считается равным аксиально-симметричной величине  $\Psi_\alpha$ , соответствующей отсутствию гофрировки.

Совершим еще одну замену. Введем вместо координаты  $\zeta$  (2.65) переменную  $\Psi = \Psi_\alpha(\mu, \eta, \zeta)$  (2.24). Поскольку любые величины даже в аксиально-симметричном приближении зависят от координаты  $\zeta = \theta$ , то эта зависимость должна быть исключена обращением равенства

$$\Psi = \Psi_\alpha(\zeta, \eta, \mu). \quad (2.71)$$

Такое обращение, однако, неоднозначно. Устранить эту неоднозначность можно таким же образом, как это было сделано в § 2.3 при введении координаты  $\theta$ . Дрейфовые траектории локально-запертых частиц в поперечном сечении тора однозначно определяются сохранением приближенных интервалов движения  $\mu$  и  $\mathcal{E} \approx \Psi$  (2.63). Как для конечных, так и для замкнутых траекторий можно ввести вместо  $\eta$  новую безразмерную переменную  $L$ , являющуюся «текущей» координатой вдоль дрейфового пути локально-запертых частиц:

$$L = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{l_{dr}} \Big|_{\substack{\mu=\text{const} \\ \Psi=\text{const}}} ; \quad l_{dr} = \frac{v_{dr}^\eta}{v_{dr}} ; \quad (2.72)$$

$$v_{dr} = \frac{\lambda Z_\alpha^2 \left[ Z_{ef} - \bar{Z}_3 T_e / (2\mu B) + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\mu B m}{T_e m_\alpha}} \right]}{2\delta\Psi_n^m \sqrt{2\mu B m_\alpha}} \sigma ; \quad (2.73)$$

$$\sigma = \int \frac{d\psi}{\Omega} / \int \frac{d\psi}{\Omega_m} ; \quad (2.74)$$

$$v_{dr}^\eta = \pm \frac{c}{Z_\alpha e B} \sqrt{\frac{G_{33}}{G}} \left| \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \zeta} \right| , \quad (2.75)$$

где интегрирование в (2.74), так же как и в (2.68), ведется между нулями подынтегральных выражений. Два знака в выражении для дрейфовой скорости (2.75) связаны с местонахождением частицы в зеркально-симметричных точках в верхней и нижней половинах тора. (Модули  $v_{dr}^\eta$  в них совпадают, а знаки противоположны.) Выражения (2.72), (2.75) записаны для ионов сорта  $\alpha$ , для электронов, как обычно, делаем замену (2.35) [учтено также, что здесь  $\mathcal{E} \approx \mu B$  (2.34), (2.63)].

Интегрирование в формуле (2.72) ведется при постоянных значениях  $\mu$ ,  $\Psi$  таким образом, чтобы текущая координата  $L$  (2.72) являлась положительной и монотонно возрастающей вдоль дрей-

фовой траектории частиц. При этом необходимо следить за сменой знака величины  $v_{dr}^{\eta}$  (последняя, например, меняет знак при каждом пересечении экваториальной плоскости). Начальное значение  $\eta_0$  для ограниченной траектории удобно выбрать на границе плазменного шнура в начале дрейфовой траектории. Для замкнутых траекторий выбор  $\eta_0$  произволен. При таком определении  $L$  зависимость любых величин от  $\Psi$ ,  $\mu$ ,  $L$  уже становится однозначной.

Обратимся теперь к общему кинетическому уравнению для функции распределения запертых частиц, усредненному по продольному движению (2.47), (П4.8). Совершая в нем переход к новым переменным  $t$ ,  $\mu$ ,  $\chi$ ,  $\Psi$ ,  $L$  и отбрасывая при условии (2.62) малые члены порядка  $\Delta$ , получаем кинетическое уравнение для функции распределения локально-запертых частиц в данном гофре  $f^L(t, L, \chi; \Psi, \mu)$ :

$$\frac{\partial I_t^L}{\partial t} + \frac{\partial I_{\eta}^L}{\partial L} + \frac{\partial I_{\chi}^L}{\partial \chi} = I_Q^L; \quad (2.76)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \Big|_{\substack{\Psi=\text{const} \\ \mu=\text{const}}} &= \frac{v_{dr}}{v_{dr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \Big|_{\substack{\Psi=\text{const} \\ \mu=\text{const}}}; \\ I_t^L &= \frac{\tilde{\Gamma}}{v_{dr}} f^L; \quad I_{\eta}^L = \tilde{\Gamma} f^L; \\ I_{\chi} &= -\chi \left( \tilde{\Gamma} \frac{\partial f^L}{\partial \chi} + f^L \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial L} \right); \quad I_Q^L = \frac{\tilde{\Gamma}}{v_{dr}} \langle Q \rangle_{\Psi}; \\ \tilde{\Gamma} &= \frac{c}{2 \sqrt{2} Z_{\alpha} e m_{\alpha}^{1/2}} \Gamma; \quad \Gamma = \frac{2}{\pi} \sqrt{\delta \Psi_n^m G_{33}} \int \Omega_m d\psi. \end{aligned} \right\} (2.77)$$

Скобки  $\langle \dots \rangle_{\Psi}$  означают усреднение по периоду продольного движения частиц  $\langle \dots \rangle_{\Psi} = \int \frac{(\dots) d\psi}{\Omega} / \int \frac{d\psi}{\Omega}$ .

Выражения (2.73)–(2.77) существенно упрощаются, если для формы гофра принять параболическую аппроксимацию

$$\delta \Psi_n = \delta \Psi_n^m [1 - \beta^2 (\psi - \psi_0)^2], \quad (2.78)$$

где  $\psi_0$  — координата «дна» потенциальной ямы гофра (см. рис. 9). При этом

$$\chi = 1 - \frac{\Psi_n - \mathcal{E}}{\delta \Psi_n^m}; \quad \Gamma = \left( \frac{\delta \Psi_n^m G_{33}}{\beta} \right)^{1/2}; \quad \sigma \equiv 1. \quad (2.79)$$

Постоянство величины  $\sigma$  (2.74) просто отражает то обстоятельство, что период колебаний частицы в приближении гармонического осциллятора (2.78) не зависит от ее энергии. Оценки показывают, что расчет функции распределения  $f^L$  с использованием аппроксимации (2.78) не должен вносить значительных погрешностей во всем интервале изменения  $\chi$ , вплоть до сепаратрисы

$$\chi = 1, \quad (2.80)$$

хотя параболическая аппроксимация (2.78) вблизи сепаратрисы заведомо неприменима (см. рис. 9). В дальнейшем всюду будем использовать это приближение и простые выражения (2.79).

Из уравнения (2.76) видно, что в нулевом порядке теории возмущений по малому параметру  $\Delta$  величины  $\mu$  и  $\Psi \approx \mathcal{E}$  действительно являются интегралами движения (2.63). Они входят в функцию распределения только как параметры. Кинетическое уравнение для локально-запертых частиц представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка по переменной  $\chi$  и первого порядка по  $t, L$ . Это параболическое уравнение с переменными коэффициентами.

Граничными условиями к уравнению (2.76) являются следующие. На сепаратрисе, разделяющей в фазовом пространстве области существования локально-запертых частиц и банановых частиц (2.80), их функции распределения совпадают [см. (2.49)]:

$$f^L(t, L, \chi = 1; \Psi, \mu) = f(t, \eta(L), \mathcal{E} = \Psi, \mu). \quad (2.81)$$

Кроме того, при  $L=0$  для ограниченных траекторий

$$f^L(t, 0, \chi; \Psi, \mu) = f_0^L(t, \chi, \Psi, \mu), \quad (2.82)$$

где  $f_0^L$  — заданная функция распределения, описывающая приход локально-запертых частиц внутрь плазменного шнура извне (например, со стенок камеры). Для замкнутых траекторий вместо (2.82) имеем условие периодичности

$$f^L(t, L, \chi; \Psi, \mu) = f^L(t, L + \Delta L, \chi; \Psi, \mu), \quad (2.83)$$

где  $\Delta L$  — период по координате  $L$ , соответствующий одному обороту замкнутой дрейфовой траектории. На границе  $\chi=0$ , отвечающей «дну» потенциальной ямы гофра, так же как и в конечной точке ограниченной траектории, не нужно специальных граничных условий, кроме требования регулярности решения. Заметим, что второе (потокое) граничное условие (2.50) здесь не понадобилось. Оно уже фактически было использовано при получении кинетического уравнения для сглаженной функции распределения банановых частиц (2.55) (см. приложение П5).

Смысл различных величин, входящих в уравнение (2.76), достаточно очевиден. Величина  $v_{dr}$  (2.73) представляет собой характерную частоту ухода частиц из гофра [или захвата в гофр, см. (1.10)]. Переменная  $L$  (2.72) представляет собой длину пути частицы вдоль дрейфовой траектории, нормированную на дрейфовую длину свободного пробега в гофре  $l_{dr} = (v_{dr}^2 / v_{dr})$  (1.12). Если разность  $(\eta - \eta_0)$  — порядка характерного масштаба изменения параметров плазмы поперек плазменного шнура, то при  $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{dr}$  (1.16)

$$L \leq 1, \quad (2.84a)$$

а при  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_{dr}$

$$L > 1. \quad (2.84b)$$



Величина  $\Gamma$  (2.77), (2.79) пропорциональна максимальному адиабатическому инварианту продольного движения частиц в данном гофре (1.21). Величина  $\sqrt{G_{33}}$ , связанная согласно (2.41) с элементом длины дуги вдоль силовой линии  $\mathbf{B}$ ,

$$\sqrt{G_{33}} = \frac{dl}{d\theta} = \frac{Nqdl}{d\psi} \approx R_0 q,$$

имеет довольно слабую зависимость от координат. Поэтому основная координатная зависимость величины  $\Gamma$  (2.79) в приближении (2.78) связана с глубиной потенциальной ямы  $\delta\Psi_m^n$  и параметром  $\beta$ . Эти величины должны вычисляться с учетом изменения  $\Psi_\alpha$  из-за винтового кручения силовой линии  $\mathbf{B}$  (см. § 3.1).

Таким образом, функция распределения локально-запертых частиц  $f^L$ , зависящая от переменных  $t, L, \chi, \Psi, \mu$ , является решением дифференциального уравнения (2.76) при фиксированных значениях  $\Psi, \mu$ . С усредненной функцией распределения банановых частиц  $f(t, \eta, \mathcal{E}, \mu)$  она связана через граничное условие (2.81) на сепаратрисе  $\chi=1$  при  $\mathcal{E}=\Psi$ . (Переменная  $L$  является функцией координаты  $\eta$  при фиксированных значениях  $\Psi, \mu$ .) Зависимость любых величин от координаты  $\xi$  должна быть исключена решением уравнения траектории (2.63) и обращением равенства (2.71). Решая уравнение (2.76), получаем функцию распределения локально-запертых частиц  $f^L(t, L, \chi; \Psi, \mu)$ , выраженную через функцию распределения банановых частиц  $f(t, \eta(L), \mu, \mathcal{E}=\Psi)$ . Чтобы теперь замкнуть систему кинетических уравнений, нужно выразить усредненные потоки  $\langle I_i^L \rangle$  в уравнении для функции распределения банановых частиц (2.55) через функцию распределения локально-запертых частиц  $f^L$  (это сделано в приложении П5). Окончательные результаты приведены в следующем параграфе.

## 2.9. Уравнения ККП

В данном параграфе приведена сводка результатов — полная замкнутая система уравнений ККП, описывающих конвективный перенос частиц в локальных гофрах магнитного поля для токамака с произвольным поперечным сечением магнитных поверхностей при наличии потенциального электрического поля. Более простые частные случаи рассмотрены в последующих параграфах. Условия применимости полученных уравнений обсуждаются в заключительном параграфе главы.

Усредненное уравнение для функции распределения запертых и пролетных частиц  $f^\pm(t, \eta, \mathcal{E}, \mu)$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \langle I_i^{\pm} \rangle + \sum_{a,b} \tilde{I}_i^L |_{a,b} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \langle I_\eta^{\pm} \rangle + \sum_{a,b} \tilde{I}_\eta^L |_{a,b} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \mu} \langle I_\mu^{\pm} \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \langle I_\mathcal{E}^{\pm} \rangle = \langle I_Q^{\pm} \rangle + \sum_{a,b} \tilde{I}_Q^L, \end{aligned} \quad (2.85)$$

где для ионов сорта  $\alpha$

$$\langle I_i^{(\pm)} \rangle = \frac{1}{m_\alpha^2} \left\{ \int \frac{B \sqrt{G}}{|v_{\parallel}|} d\theta \right\} f^{(\pm)}; \quad (2.86a)$$

$$\langle I_g^{(\pm)} \rangle = -\frac{1}{m_\alpha^2} \left\{ \int B \sqrt{G} d\theta \left[ \frac{\lambda Z_\alpha^2}{|v_{\parallel}|} \sqrt{\frac{m_\alpha}{2\mathcal{K}}} \widehat{F} \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm Z_\alpha m_\alpha e E_{\parallel} H(\mathcal{E} - \Psi_{\max}) \right] \right\} f^{(\pm)}; \quad (2.86б)$$

$$\langle I_\mu^{(\pm)} \rangle = -\frac{1}{m_\alpha} \left\{ \int B \sqrt{\frac{G}{2}} d\theta \frac{\lambda Z_\alpha^2}{\mathcal{K}^{3/2}} \left[ \frac{|v_{\parallel}|}{2B} \left( Z_{ef} - \bar{Z}_3 \frac{T_e}{2\mathcal{K}} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{4}{3 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{m_\alpha} \frac{\mathcal{K}}{T_e}} \right) \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\mu}{m_\alpha} \frac{\widehat{F}}{|v_{\parallel}|} \right] \right\} f^{(\pm)}; \quad (2.86в)$$

$$I_Q^{(\pm)} = \frac{1}{m_\alpha^2} \int \frac{B \sqrt{G}}{|v_{\parallel}|} Q d\theta; \quad E_{\parallel} = (E_{\text{инд}} \cdot \mathbf{b}). \quad (2.86г)$$

Здесь величины  $\lambda$ ,  $Z_{ef}$ ,  $Z_h$ ,  $\widehat{F}$ ,  $G$ ,  $v_{\parallel}$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $H(x)$  определены согласно (2.9), (2.15), (2.28), (2.34), (2.39а), (2.44). Интегрирование во всех формулах ведется по полярному углу  $\theta$  между точками отражения для банановых частиц и от 0 до  $2\pi$  для пролетных. Знаки  $(\pm)$  соответствуют двум различным группам пролетных частиц: *ускоряемых* электрическим полем  $E_{\parallel}$  и *замедляемых*. Для запертых частиц функции  $f^{(+)}$  и  $f^{(-)}$  совпадают. Фигурные скобки в (2.86) символически выражают тот факт, что интегрирование по  $\zeta$  не затрагивает функцию распределения  $f$  (последняя от  $\theta$  не зависит). Интегрирование распространяется только на различные коэффициенты и дифференциальный оператор  $\widehat{F}$  (2.34), коэффициенты перед производными в котором могут, в принципе, зависеть от  $\theta$ . Величины  $B$ ,  $\Phi$ ,  $E_{\parallel}$ ,  $T_\alpha$  и другие взяты здесь в аксиально-симметричном приближении, т. е. как для идеального токамака с отсутствующей гофрировкой, предполагается также зеркальная симметрия относительно экваториального сечения тора. Уравнение для электронов получается заменой (2.35).

Поперечный перенос, обусловленный влиянием гофров непосредственно на движение банановых частиц, а также любые другие виды переноса, кроме ККП (неоклассический перенос, перенос, связанный с колебаниями силовых линий магнитного поля, и т. д.), включены в величину  $\langle I_\eta^{(\pm)} \rangle$ , которая здесь не конкретизируется. На сепаратрисе

$$\mathcal{E} = \Psi_{\max}(\eta, t), \quad (2.87)$$

разделяющей запертые ( $\mathcal{E} \leq \Psi_{\max}$ ) и пролетные ( $\mathcal{E} > \Psi_{\max}$ ) час-

тицы, имеют место граничные условия (2.59), (2.60):

$$\left. \begin{aligned} f^{(+)} \Big|_{\mathcal{E}=\Psi_{\max}+0} &= f^{(-)} \Big|_{\mathcal{E}=\Psi_{\max}+0} = f \Big|_{\mathcal{E}=\Psi_{\max}-0}; \\ (R^{(+)} + R^{(-)}) \Big|_{\mathcal{E}=\Psi_{\max}+0} &= 2R \Big|_{\mathcal{E}=\Psi_{\max}-0}; \\ R^{(\pm)} &= \langle I_{\mathcal{E}}^{(\pm)} \rangle - B_{\max} \langle I_{\mu}^{(\pm)} \rangle - \langle I_{\eta}^{(\pm)} \rangle \frac{\partial \Psi_{\alpha}}{\partial \eta}, \end{aligned} \right\} (2.88)$$

где  $B_{\max}$ ,  $\Psi_{\max} = Z_{\alpha} \Phi_{\max} + \mu B_{\max}$  — максимальные значения магнитной индукции и эффективного потенциала на данной магнитной поверхности; предполагается, что они достигаются на экваториальной поверхности во внутренней части тора,  $\theta = \pi$ .

Далее, слагаемые, описывающие поток локально-запертых частиц, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{I}_f^L \Big|_{a,b} &= \mathcal{P} \langle f^L \rangle_{\chi} \Big|_{a,b}; \\ \tilde{I}_{\eta}^L \Big|_{a,b} &= \mathcal{P} v_{dr}^{\eta} \langle f^L \rangle_{\chi} \Big|_{a,b}; \\ \tilde{I}_Q^L \Big|_{a,b} &= \mathcal{P} \langle \langle Q \rangle_{\Psi} \rangle_{\chi} \Big|_{a,b}. \end{aligned} \right\} (2.89)$$

Здесь, как обычно, скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение

$$\left. \begin{aligned} \langle \dots \rangle_{\chi} &= \int_0^1 (\dots) d\chi; \\ \mathcal{P} &= \frac{v_{dr}}{|v_{dr}^{\eta}|} \tilde{\Gamma} \equiv \frac{c}{2\sqrt{2} Z_{\alpha} e m_{\alpha}^{3/2}} \frac{\Gamma}{|v_{dr}^{\eta}|} \equiv \frac{\sqrt{G}}{2\sqrt{2} G_{33}} \frac{B}{m_{\alpha}^{3/2} \left| \frac{\partial \Psi_{\alpha}}{\partial \xi} \right|} \Gamma, \end{aligned} \right\} (2.90)$$

где величины  $G$ ,  $G_{33}$ ,  $\Gamma$ ,  $v_{dr}^{\eta}$  определены в (2.39а), (2.41), (2.75), (2.79). Индексы  $(a, b)$  соответствуют зеркально-симметричным точкам в верхней и нижней половинах тора. В (2.85) по ним производится суммирование. Функция распределения локально-запертых частиц  $f^L(t, L, \chi; \Psi, \mu)$  является решением уравнения [ср. с (2.76)]

$$\frac{1}{v_{dr}} \frac{\partial f^L}{\partial t} + \frac{\partial f^L}{\partial L} - \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \chi \frac{\partial f^L}{\partial \chi} \right) - \chi \frac{\partial}{\partial L} (\ln \Gamma) \frac{\partial f^L}{\partial \chi} = \frac{\langle Q^L \rangle_{\Psi}}{v_{dr}}, \quad (2.91)$$

где  $\langle Q^L \rangle_{\Psi}$ ,  $\chi$ ,  $L$ ,  $v_{dr}$  определены в (2.68), (2.72), (2.73), (2.76). Граничные условия к уравнению даны в (2.81), (2.82). Главным из них является равенство функций распределения локально-запертых  $f^L$  и банановых частиц  $f$  при  $\mathcal{E} = \Psi$  на сепаратрисе  $\chi = 1$  (2.81). В полученном решении для функции распределения  $f^L$  и коэффициента  $\mathcal{P}$  (2.90) необходимо от переменной  $L$  перейти к  $\eta$  обращением равенства (2.72), а переменную  $\Psi$  заменить  $\mathcal{E}$ .

Комбинация членов, описывающих в уравнении (2.85) перенос локально-запертых частиц, может быть согласно (П5.8) выражена через значение функции распределения  $f^L$  и ее производной

по  $\chi$  на разделяющей сепаратрисе следующим образом:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \bar{I}_i^L + \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{I}_\eta^L - I_Q^L \right) \Big|_{a, b} = \frac{c}{2\sqrt{2} Z_\alpha e m_\alpha^{3/2}} \frac{v_{dr}}{|v_{dr}^\eta|} \times \\ \times \left( \Gamma \frac{\partial f^L}{\partial \chi} + f^L \frac{\partial \Gamma}{\partial L} \right) \Big|_{\chi=1}, \quad (2.92)$$

где дифференцирование по  $L$  производится при постоянных  $\mu$ ,  $\Psi = \mathcal{E}$ . Выражение, стоящее в правой части (2.92), в ряде случаев может оказаться удобнее при проведении конкретных расчетов, хотя оно и не так наглядно, как выражение в левой части.

Отметим, что выражения для плотностей потоков в (2.86) нормированы таким образом, чтобы число банановых или пролетных частиц, движущихся в одном определенном направлении вдоль магнитного поля, в элементе фазового объема  $d\mathcal{E} d\mu d\theta d\eta d\zeta$  было равно

$$dn^{(\pm)} = \langle I_i^{(\pm)} \rangle d\mathcal{E} d\mu d\theta d\eta d\zeta.$$

Полное число частиц в элементе фазового объема определится суммированием  $dn^{(+)}$  и  $dn^{(-)}$  (для банановых — простым удвоением). Отметим, что соответствующее усредненное число локально-запертых частиц, пропорциональное  $I_i^L$  (2.85), составляет малую (порядка  $\sqrt{\Delta}$ ) часть общего числа частиц, поэтому слагаемое  $\partial I_i^L / \partial t$  в уравнении (2.85) неважно. Основную роль играет слагаемое  $\partial \bar{I}_\eta^L / \partial \eta$ , описывающее перенос локально-запертых частиц, и, возможно, слагаемое  $\bar{I}_Q^L$  в том случае, если основной источник или сток частиц локализован в гофрах.

Отметим также, что выражения (2.89), (2.90) получены для случая, когда в токамаке имеются  $N$  одинаковых гофров, аксиально-симметрично распределенных вдоль главной окружности тора [число гофров  $N$  входит в определение координаты  $\psi$  (2.70) и учтено, таким образом, в параметре  $\beta$  (2.78)]. Полученные выражения тривиально обобщаются на случай  $N$  различных гофров (по ним делается усреднение) и даже одного единственного гофра. Последний случай может представлять интерес с точки зрения управления режимом работы термоядерного реактора, когда удобно создавать один искусственный управляемый гофр с изменяющимися параметрами [9]. При одном гофре справедливы все полученные выражения (см. § 2.12). Поскольку этот гофр узкий по тороидальному углу  $\varphi$ , то при  $N=1$  (2.70) параметр  $\beta$  (2.78) становится большим.

### 2.10. Тонкий токамак без радиального электрического поля

Приведенные выше уравнения существенно упрощаются при отсутствии в плазме внутренних электрических полей разделения заряда,  $\Phi=0$ . При этом полная энергия частиц совпадает с кинетической,  $\mathcal{E} = \mathcal{K}$ , а дрейфовые траектории локально-запертых частиц вырождаются в вертикальные прямые линии. Если, кроме того, рассматривать токамак с большим отношением  $R/a \gg 1$ , и с

поперечным сечением магнитных поверхностей в форме концентрических окружностей, то вместо  $\mu$  удобно использовать безразмерную переменную  $s$  [13]:

$$s = \frac{\mu}{\mathcal{G}} B_0 = \xi(r) \sin^2 \theta; \quad (2.93)$$

$$\xi(r) = \frac{B_0}{B(r)} \approx 1 + \varepsilon \cos \theta. \quad (2.94)$$

Здесь  $\theta$  — полоидальный угол;  $\varepsilon = \rho/R_0$ ;  $\rho$  — малый радиус магнитной поверхности;  $R_0$  — главный радиус тора;  $B_0$  — магнитная индукция на магнитной оси токамака. Кроме того, здесь ( $\eta = \rho$ )

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{G_{33}} &\approx 1/qR_0; & \sqrt{G} &\approx \rho R_0 q; \\ dsd\rho d\mathcal{G}d\varphi &= q(B_0/\mathcal{G}) d\mu d\eta d\mathcal{G}d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

( $\varphi$  — тороидальный угол).

Кинетическое уравнение для сглаженной функции распределения банановых и пролетных ионов сорта  $\alpha$  в переменных  $s$  (2.93),  $\rho$ ,  $\mathcal{G}$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( I_i^\bullet + \sum_{a,b} I_i^{\bullet L} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( I_\rho^\bullet + \sum_{a,b} I_\rho^{\bullet L} \right) + \frac{\partial}{\partial s} I_s^\bullet + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} I_\mathcal{G}^\bullet = I_Q^\bullet + \sum_{a,b} I_Q^{\bullet L}; \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\left. \begin{aligned} I_i^\bullet &= \frac{\pi}{m_\alpha} \sqrt{\frac{2\mathcal{G}}{m_\alpha}} J_{i1}^\bullet \rho R_0 f; & I_Q^\bullet &= \frac{\pi}{m_\alpha} \sqrt{\frac{2\mathcal{G}}{m_\alpha}} J_{i4}^\bullet \rho R_0; \\ I_s^\bullet &= -\frac{\pi \lambda Z_\alpha^2 \rho R_0}{m_\alpha^2 \mathcal{G}} s J_2^\bullet \frac{df}{ds} \left( Z_{ef} - \frac{T_e}{2\mathcal{G}} \bar{Z}_3 + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\mathcal{G}}{T_e} \frac{m}{m_\alpha}} \right); \\ I_\mathcal{G}^\bullet &= -\frac{\pi \rho R_0}{m_\alpha^2} [J_{i1}^\bullet \lambda Z_\alpha^2 \hat{F}^* \pm 2Z_\alpha \mathcal{G} e J_3^\bullet H(s + \varepsilon - 1)] f; \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1^\bullet(\rho, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \varepsilon \cos \theta - s}}; \\ J_2^\bullet(\rho, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varepsilon \cos \theta - s} d\theta; \\ J_3^\bullet &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{\parallel}(\rho, s) d\theta; \\ J_4^\bullet &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q(\rho, s) d\theta}{\sqrt{1 + \varepsilon \cos \theta - s}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

Величина  $\hat{F}^*$  совпадает с  $\hat{F}$  при замене

$$\hat{D} \rightarrow T_e \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}}. \quad (2.99)$$

Кинетическое уравнение для электронов получается из (2.96) при замене (2.35). В (2.97), (2.98) предполагается также, что различные параметры плазмы ( $T_e$ ,  $Z_\alpha$  и т. д.) постоянны на данной магнитной поверхности. Число частиц в элементе объема  $d\mathcal{E} ds dp d\varphi d\theta$ , усредненное по полоидальному углу  $\theta$ , дается выражением

$$dn = I_s d\mathcal{E} ds dp d\varphi d\theta.$$

Область запертых частиц есть

$$1 - \varepsilon \leq s \leq 1 + \varepsilon, \quad (2.100)$$

а пролетных частиц

$$0 \leq s < 1 - \varepsilon. \quad (2.101)$$

На разделяющей их сепаратрисе  $s = 1 - \varepsilon$  должны выполняться граничные условия [ср. с (2.88)]

$$\left. \begin{aligned} f^{(+)}|_{s=1-\varepsilon-0} &= f^{(-)}|_{s=1-\varepsilon-0} = f|_{s=1-\varepsilon+0}; \\ [(R_0 J_s^{*(+)} + I_p^{*(+)}) + (R_0 J_s^{*(-)} + I_p^{*(-)})]|_{s=1-\varepsilon-0} &= \\ &= 2(R_0 J_s^* + I_p)|_{s=1-\varepsilon+0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

(Знаки  $(\pm)$  в (2.96)–(2.98) для простоты опущены, но подразумеваются.)

Кинетическое уравнение для функции распределения локально-запертых частиц  $f^L(t, \chi, L; \Psi, s)$  имеет вид, аналогичный (2.91), где вместо  $\Gamma$  (2.79) можно использовать более простое выражение

$$\Gamma^* = \sqrt{\Delta} / \beta \approx \Gamma / R_0 \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.103)$$

где  $\Delta = \delta B_n^m / B_0 \ll 1$ .

(Дифференцирование по  $L$  ведется при  $s = \text{const}$ ,  $\mathcal{E} = \text{const}$ .) Здесь  $\delta B_n^m$  — максимальное возмущение магнитной индукции в данном гофре с учетом винтового кручения магнитной силовой линии (2.78).

Имеем здесь также вместо (2.73), (2.75), (2.89), (2.90):

$$\left. \begin{aligned} v_{dr} &\approx \pm \frac{\mathcal{E}}{m_\alpha R_0 \omega_{B\alpha}} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - (s-1)^2}}{\varepsilon}; \\ \omega_{B\alpha} &\approx \frac{Z_\alpha e B_0}{m_\alpha c}; \\ v_{dr} &\approx \frac{\lambda Z_\alpha^2 [Z_{ef} - \bar{Z}_s T_e / (2\mathcal{E}) + (4/3 \sqrt{\pi}) \sqrt{(m/m_\alpha) (\mathcal{E}/T_e)}]}{\Delta \sqrt{m_\alpha} (2\mathcal{E})^{3/2}}; \end{aligned} \right\} \quad (2.104)$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_t^{\bullet L} &= \mathcal{P}^* \langle f^L \rangle_{\chi}; \\
 I_\rho^{\bullet L} &= \mathcal{P}^* v_{dr}^0 \langle f^L \rangle_{\chi}; \\
 I_Q^{\bullet L} &= \mathcal{P}^* \ll Q \gg_{\psi} \gg_{\chi}; \\
 \mathcal{P}^* &\approx \frac{\mathcal{E}}{B_0} \mathcal{P} = \frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{\mathcal{E}\Delta}{2(\varepsilon^2 - (s-1)^2)}} \frac{\rho R_0}{m_\alpha^{1/2}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Аналогичное (2.92) соотношение имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} I_t^{\bullet L} + \frac{\partial}{\partial \rho} I_\rho^{\bullet L} - I_Q^{\bullet L} &= \frac{R_0}{2\sqrt{2} \omega_{B\alpha}} \frac{\mathcal{E}^{3/2}}{m_\alpha^{1/2}} \frac{v_{dr}}{v_{dr}^0} \times \\
 &\times \left( \Gamma^* \frac{\partial f^2}{\partial \chi} + f^L \frac{\partial \Gamma^*}{\partial L} \right) \Big|_{\chi=1}.
 \end{aligned} \quad (2.106)$$

Здесь всюду использована параболическая аппроксимация (2.78).

Отметим, что приведенные уравнения могут быть применены и при наличии внутренних электрических полей разделения зарядов, если рассматривать достаточно быстрые частицы с энергией, существенно превышающей характерные разности потенциалов.

## 2.11. Токамак с вертикально-однородной гофрировкой

Если максимальный адиабатический инвариант продольного движения локально-запертых частиц, пропорциональный величине  $\Gamma$  (2.79) [или  $\Gamma^*$  (2.103)], не изменяется вдоль их дрейфовой траектории, то уравнение (2.91) существенно упрощается. Такой случай может реализоваться в токамаке в отсутствие радиального электрического поля, если гофрировка [точнее, величина  $\sqrt{\Delta}/\beta$  (2.103)] постоянна вдоль вертикальной прямой. Изменения гофрировки по горизонтали при этом произвольное. В стационарном случае в отсутствие объемных источников и стоков локально-запертых частиц уравнение (2.91) сводится тогда к

$$\frac{\partial f^L}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \chi \frac{\partial f^L}{\partial \chi} \right) \quad (2.107)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned}
 f^L(\chi, s, 0) &= 0; \\
 f^L(1, s, L) &= f(\mathcal{E}, s, \rho(L)).
 \end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

Решение (2.107) при граничных условиях (2.108), регулярное при  $\chi=0$ , имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
 f^L(\chi, s, L) &= \int_0^L f(\mathcal{E}, s, \rho(\tilde{L})) \mathcal{R}_0(\chi, L - \tilde{L}) d\tilde{L}; \\
 \frac{\partial f^L}{\partial \chi} &= \int_0^L \frac{\partial f}{\partial \tilde{L}}(\mathcal{E}, s, \rho(\tilde{L})) \mathcal{M}_0(\chi, L - \tilde{L}) d\tilde{L}; \\
 \mathcal{M}_0(\chi, L) &= \frac{1}{\sqrt{\chi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_1(z_k \sqrt{\chi})}{J_1(z_k)} \exp\left(-\frac{z_k^2}{4} L\right); \quad \mathcal{R}_0 = \frac{\partial}{\partial \chi} (\chi \mathcal{M}_0).
 \end{aligned} \right\} \quad (2.109)$$

Здесь  $J_0(z)$ ,  $J_1(z)$  — функции Бесселя;  $z_k$  — положительные нули  $J_0(z)$ ;

$$\langle f(\chi, L) \rangle_{\chi} = \int_0^L f(\mathcal{E}, s, \rho(\tilde{L})) M_0(L - \tilde{L}) d\tilde{L}; \quad (2.110)$$

$$M_0(y) \equiv \mathcal{M}_0(1, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{z_k^2}{4} y\right). \quad (2.111)$$

При  $y \lesssim 3$  можно с хорошей точностью использовать аппроксимацию

$$M_0(y) \approx e^{-y} / \sqrt{\pi y}. \quad (2.111a)$$

При больших значениях  $y$  (больше 3)

$$M_0(y) \approx \exp(-1,44y). \quad (2.111b)$$

Если характерное время изменения функций распределения всех частиц существенно превышает типичные времена дрейфа локально-запертых частиц поперек плазменного шнура, то можно пользоваться стационарным решением (2.109) — (2.111). При этом получаем для функции распределения банановых частиц в тонком токамаке в отсутствие источников и других видов переноса замкнутое интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial I_t^*}{\partial t} + \frac{\partial I_{\mathcal{E}}^*}{\partial \mathcal{E}} + \frac{\partial I_s^*}{\partial s} + \frac{\partial I_{\rho}^{*L}}{\partial \rho} = 0, \quad (2.112)$$

где величины  $I_{t, \mathcal{E}, s}^*$  даны выражениями (2.97), (2.98), а

$$I_{\rho}^{*L} = \frac{1}{2\beta\omega_{B\alpha}} \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \frac{\mathcal{E}^{s/2}}{m_{\alpha}^{s/2}} (\langle f_1 \rangle_{\chi} - \langle f_2 \rangle_{\chi}); \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned}
 \langle f_1 \rangle_{\chi} &= \int_{R_0 | s-1}^{\rho} M_0\left(L_{\rho}^{\rho}\right) f(\tilde{\rho}) | L'(\tilde{\rho}) | d\tilde{\rho} + \\
 &+ \int_{R_0 | s-1}^a M_0\left(L_{|s-1| R_0}^{\rho} + L_{|s-1| R_0}^{\tilde{\rho}}\right) f(\tilde{\rho}) | L'(\tilde{\rho}) | d\tilde{\rho}; \quad (2.114)
 \end{aligned}$$



$$\langle f_2 \rangle_x = \int_{\rho}^a M_0(L_{\rho}^{\tilde{\rho}}) f(\tilde{\rho}) |L'(\tilde{\rho})| d\tilde{\rho}; \quad (2.115)$$

$$L_A^B = |L(B) - L(A)|; \quad |L'| = \left| \frac{dL}{d\rho} \right| = \left| \frac{v_{dr}}{v_{dr}^{\rho}} \right| \equiv \\ \equiv \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - (s-1)^2 R_0^2}} \frac{\lambda Z_{e1}^2 (Z_{e1} - \tilde{Z}_3 T_{e1}/(2\mathcal{E})) + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{m_{\alpha}} \frac{\mathcal{E}}{T_e}}}{2\sqrt{2} \Delta g^{1/2}}. \quad (2.116)$$

Такие же выражения имеют место и для электронов с заменой (2.35).

## 2.12. Условия применимости уравнений ККП

Обсудим теперь условия, при которых получены основные уравнения ККП (см. § 2.9—2.11). Выпишем прежде всего те условия, которые позволяют провести усреднение по продольному движению частиц (§ 2.4). Они имеют вид

$$\frac{2\pi R_0 v_{\alpha}}{v} \ll \frac{\varepsilon^{1/2}}{q}, \quad N \Delta^{1/2}; \quad (2.117)$$

$$\frac{\rho_{B\alpha}}{R_0} \ll \frac{\varepsilon^{1/2}}{q}, \quad \sqrt{\Delta}; \quad (2.118)$$

$$\frac{2\pi R_0}{v\tau} \ll \frac{\sqrt{\varepsilon}}{q}, \quad N \sqrt{\Delta}; \quad (2.119)$$

$$2\pi e_{\alpha} E_{\parallel} R_0 q \ll \mathcal{E}. \quad (2.120)$$

Здесь все неравенства, содержащие параметр  $\varepsilon = \rho/R_0$ , относятся к банановым частицам, а содержащие  $\Delta$  — к локально-запертым. Последнее неравенство относится к пролетным частицам. Условие (2.117) представляет собой условие бананового режима [2, 3], при котором только и возможно разделение всех частиц на пролетные, банановые и локально-запертые. Подчеркнем, что мы рассматриваем здесь только быстрые частицы, для которых эти условия выполняются существенно легче, чем для тепловых (основная плазма может при этом находиться в режиме «плато» или Пфирша — Шлютера). Неравенства (2.118) выражают малость толщины «банана» по сравнению с малым радиусом тора (банановые частицы) и малость скорости тороидального дрейфа локально-запертых частиц по сравнению с их продольной скоростью. (Если в плазме имеется радиальное электрическое поле  $|E| \sim T_{e,i}/(ea)$ , то для локально-запертых частиц с кинетической энергией  $\mathcal{K} > T_{e,i}/\varepsilon$  тороидальный дрейф является преобладающим, см. § 1.6). Неравенства (2.118) дают основное ограничение сверху по энергиям рассматриваемых частиц (главным образом для ионов). Заметим попутно, что всюду мы пользуемся нерелятивистским приближением,  $v \ll c$ . Неравенство (2.119) означает адиабатическую медлен-

ность изменения внешних параметров среды (с характерным временем  $\tau$ ) за время одного колебания запертых частиц вдоль магнитной силовой линии. Последнее условие (2.120) выражает относительно малость изменения энергии пролетной частицы из-за продольного электрического поля на одном периоде вращательно-го преобразования силовой линии **B**.

Условие (2.117) позволяет также ввести понятие узкой сепаратрисы, разделяющей различные группы частиц. Действительно, из-за кулоновских соударений относительная толщина сепаратрисы, отделяющей локально-запертые частицы от банановых, составляет по порядку

$$\tilde{\Delta}_\delta \sim 2\pi R_0 v_\alpha / (Nv \sqrt{\Delta}). \quad (2.121)$$

Условие  $\tilde{\Delta}_\delta \ll \Delta$  совпадает со вторым неравенством (2.117). То же самое относится и к сепаратрисе, разделяющей банановые и пролетные частицы; соответствующая ширина  $\tilde{\Delta}_\varepsilon$  получается из (2.121) заменой  $N \rightarrow 1/q$ ,  $\Delta \rightarrow \varepsilon$ . Эта сепаратриса, однако, приобретает конечную ширину также из-за колебаний максимального потенциального горба при перемещении вдоль данной силовой линии (см. § 2.6). Соответствующая ширина при  $N$  одинаковых гофрах составляет

$$\tilde{\Delta}_s \sim \min(2\pi/(Nq), \Delta). \quad (2.122)$$

Эту ширину можно заведомо не учитывать при

$$\tilde{\Delta}_s \ll \tilde{\Delta}_\varepsilon \sim 2\pi R_0 v_\alpha q / (v \sqrt{\varepsilon}). \quad (2.123)$$

Условие того, что можно пренебречь нестационарным изменением внешних параметров среды за время пролета локально-запертых частиц в гофре (см. § 2.8), имеет вид

$$\tau \gg aR_0 / (v\rho_{B\alpha}). \quad (2.124)$$

Это же условие позволяет не учитывать вихревое электрическое поле в выражении для дрейфовой скорости (2.75), (П4.13), (П4.14).

Оценим теперь условия, при которых можно производить усреднение по координате  $\xi$ . Соответствующую оценку можно получить, например, исходя из того, чтобы «осциллирующая» по  $\xi$  часть функции распределения банановых частиц была мала по сравнению со сглаженной функцией распределения (см. приложение П5). При  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_{\text{др}}$  (1.16) требуемое условие имеет вид

$$\Delta / (Nq) \ll \varepsilon. \quad (2.125)$$

Это заведомо выполнено при условии (2.62). В наиболее интересном для нас случае  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_{\text{др}}$  соударения частиц не очень существенны, и главную роль играет дрейфовое движение. При этом характерное время дрейфа локально-запертых частиц поперек плазменного шнура оказывается порядка характерного времени одного

оборота прецессии банановых орбит вдоль главной окружности тора. Характерное время прецессии банановых частиц между двумя соседними гофрами в  $N$  раз меньше. Учитывая, что относительные доли локально-запертых и банановых частиц, участвующих в конвективном движении, составляют соответственно  $\sqrt{\Delta}$  и  $\sqrt{\varepsilon}$  общего числа частиц в плазме, можно написать следующее условие:

$$\sqrt{\Delta} \ll N\sqrt{\varepsilon}. \quad (2.126)$$

Заметим, что эта оценка сделана для наиболее неблагоприятного случая, когда могут возникать очень сильные и резко меняющиеся в пространстве искажения функции распределения. Обычно ситуация гораздо благоприятнее. Заметим также, что оценки (2.125), (2.126) позволяют использовать обсуждаемое приближение даже в случае одного гофра ( $N=1$ ).

Остальные условия применимости полученных уравнений уже рассматривались ранее, см. (2.3), (2.16) — (2.19).

### 3. КИНЕТИЧЕСКИЙ КОНВЕКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС

#### 3.1. Распределение гофрировки магнитного поля в токамаке

Локальные потенциальные ямы гофров возникают вследствие секционной структуры токамака, приводящей к модуляции значения магнитной индукции, наложенной на плавное тороидально-винтовое изменение эффективного потенциала  $\Psi_\alpha$  (2.24) вдоль заданной силовой линии магнитного поля  $\mathbf{B}$  (см. рис. 8, 9). Ограничимся рассмотрением простейшего случая тонкого токамака при отсутствии полоидальных электрических полей. При этом изменение эффективного потенциала  $\Psi_\alpha$  вдоль силовой линии  $\mathbf{B}$  связано только с неоднородностью распределения магнитной индукции. При слабой модуляции гофрировки зависимость  $B$  от тороидальных координат  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  имеет вид (1.4). Переходя от  $\theta$ ,  $\varphi$  к координатам  $\zeta$ ,  $\psi$  (2.37), (2.70), связанным с магнитными силовыми линиями

$$\zeta = \theta - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{q} \approx \theta - \frac{\varphi - \varphi_0}{q}; \quad (3.1)$$

$$\psi = N(\varphi - \varphi_0) \quad (3.2)$$

при условии (1.1), получаем:

$$\cos \theta \approx \cos \zeta - (\psi/Nq) \sin \zeta; \quad (3.3)$$

$$B \approx B_0 [1 - \varepsilon \cos \zeta + \delta(\zeta, \rho)(\alpha \psi \sin \zeta - \cos \psi)]; \quad (3.4)$$

$$\alpha = \varepsilon/(Nq\delta). \quad (3.5)$$

Здесь, так же как и в § 2.6, считается, что вертикальная плоскость поперечного сечения шнура  $\varphi = \varphi_0$  проходит через центр данного горба, при этом  $\xi = \theta_0 \approx \theta$ . Из малых поправок к  $B_0$  в (3.4) существенна величина, пропорциональная  $\delta$ , зависящая от  $\psi$ ; слагаемым ( $-\varepsilon \cos \xi$ ) в тонком токамаке  $\varepsilon \ll 1$  (см. § 2.10) можно пренебречь.

Из (3.4) легко получить выражения для экстремумов локальной магнитной ямы данного гофра. При  $\sin \theta \neq 0$  координата дна магнитной ямы  $\psi_0$  смещена относительно центра гофра  $\psi = 0$  (см. рис. 9)

$$\psi_0 = -\arcsin \alpha^* \cdot \text{sign } \theta; \quad (3.6)$$

$$\alpha^* = \alpha | \sin \theta |, \quad (3.7)$$

а вершина наименьшего из горбов, ограничивающих данную локальную магнитную яму, расположена в точке

$$\psi_1 = (\arcsin \alpha^* - \pi) \text{sign } (\theta), \quad (3.8)$$

где выбрана следующая ветвь арксинуса:

$$-\pi/2 \leq \arcsin \alpha^* \leq \pi/2. \quad (3.9)$$

Относительная глубина гофра при этом равна [7]\*

$$\Delta = 2\delta (\sqrt{1 - \alpha^{*2}} - \alpha^* \arccos \alpha^*), \quad 0 \leq \arccos \alpha^* \leq \pi. \quad (3.10)$$

Параметры параболической аппроксимации (2.78), см. рис. 9, имеют при этом вид (здесь  $\Delta \Psi_\alpha = \mu B$ ,  $\Delta \Psi_{m_n} = \mu \Delta B_{m_n}$ )

$$\begin{aligned} \beta &= \left[ \frac{B''_{yy}(\psi_0)}{2\Delta B_n^m} \right]^{1/2} = \left[ \frac{\delta(1 - \alpha^{*2})}{2\Delta} \right]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^{*2}}} - \frac{\alpha^* \arccos \alpha^*}{1 - \alpha^{*2}} \right]^{-1/2}; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\beta} = \Delta \sqrt{\frac{2}{\delta(1 - \alpha^{*2})}} = 2\sqrt{2\delta} \left( 1 - \frac{\alpha^* \arccos \alpha^*}{\sqrt{1 - \alpha^{*2}}} \right). \quad (3.12)$$

Из полученных выражений видно, что искажения гофрировки, обусловленные тороидально-винтовым вращением силовой линии, целиком определяются параметром  $\alpha^*$  (3.7), (1.5). При

$$\alpha^* \ll 1 \quad (3.13)$$

вращение силовой линии несущественно, при этом (см. § 1.1)

$$\Delta \approx 2\delta, \quad \beta \approx 1/2. \quad (3.14)$$

При

$$\alpha^* > 1 \quad (3.15)$$

---

\* Здесь и всюду под  $\Delta$  понимается полная относительная глубина магнитной ямы гофра [8], а не половина, как в [7].

магнитные ямы исчезают [7], а при

$$(1 - \alpha^*) \ll 1 \quad (3.16)$$

$$\Delta \approx \frac{4\sqrt{2}}{3} \delta (1 - \alpha^*)^{3/2}; \quad (3.17)$$

$$\beta \approx \frac{\sqrt{3}}{2 [2(1 - \alpha^*)]^{1/4}}; \quad (3.18)$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\beta} \approx \frac{4\sqrt{2\delta}}{3} (1 - \alpha^*). \quad (3.19)$$

В грубом приближении функцию  $\sqrt{\Delta}/\beta$  можно аппроксимировать линейной функцией

$$\sqrt{\Delta}/\beta \approx (1.5 \div 2) \sqrt{2\delta} (1 - \alpha^*). \quad (3.20)$$

Величина  $\delta$  обычно экспоненциально уменьшается с увеличением расстояния от магнитных катушек в глубь плазменного разряда (подробнее см. [7, 8]). В то же время величина  $(1 - \alpha^*)$  уменьшается, наоборот, от магнитной оси к периферии разряда. В реальных токамаках  $\alpha^*$  может достигать 1 и даже превышать это значение. В соответствующих областях разряда локальные потенциальные ямы отсутствуют. Это видно из рис. 2 в § 1.1, где показаны примеры распределения по сечению разряда в токамаке глубины магнитных ям гофров. Заметим также, что параметр  $\alpha^*$  (3.5) сильно зависит от числа катушек  $N$ . Однако увеличение  $N$  приводит обычно не к уменьшению, а к увеличению  $\alpha$  и  $\alpha^*$ . Это связано с тем, что рост  $N$  приводит к более резкому экспоненциальному спаду  $\delta$  по направлению в глубь разряда (подробнее см. [7, 8]), так что величина  $N\delta$  в большей части разряда уменьшается с увеличением  $N$ . Изменение коэффициента запаса устойчивости  $q$  также приводит к некоторому изменению распределения в токамаке параметров гофрировки. Если с целью управления режимом работы термоядерной установки создавать искусственную гофрировку с перестраиваемыми параметрами, то достаточно небольшого увеличения  $\delta$ , чтобы магнитные ямы гофра охватили всю область разряда.

### 3.2. Низкоэнергетический диффузионный предел

Характерная длина свободного пробега локально-запертых частиц вдоль дрейфовой траектории  $I_{dr}$  (1.12) резко падает с уменьшением их энергии  $\sim \mathcal{E}^{5/2}$  (см. § 1.3). Для частиц достаточно низкой энергии эта длина становится столь малой, что перенос в гофра принимает диффузионный характер. Впервые поперечный перенос в гофра был рассмотрен именно в этом предельном случае [5—8]. Получим соответствующие выражения, исходя из общих уравнений ККП (см. § 2.9).

Рассмотрим для простоты тонкий токамак с поперечным сечением магнитных поверхностей в форме концентрических окружно-

стей. При этом все параметры плазмы, включая и потенциал  $\Phi$ , будем считать постоянными на данной магнитной поверхности  $\eta = \rho = \text{const}$  ( $\rho$  — малый радиус магнитной поверхности). Пусть величина  $L_f(\mathcal{E})$  — характерный поперечный масштаб изменения функции распределения заряженных частиц сорта  $\alpha$ . Например, для максвелловской функции распределения частиц с температурой  $T_\alpha$  имеем с учетом (1.14)

$$L_f(\mathcal{E}) \sim f \left| \frac{\partial f}{\partial \rho} \right| \sim T_\alpha^2 / \mathcal{E} \left| \frac{dT_\alpha}{d\rho} \right| \quad (3.21)$$

(считаем, что  $\frac{1}{n} \left| \frac{dn}{d\rho} \right| \ll \frac{1}{T_\alpha} \left| \frac{dT_\alpha}{d\rho} \right|$ ). В условиях, когда характерная длина дрейфового пробега в гофре мала ( $l_{dr} \ll L_f$ ), имеем согласно (2.72)

$$L(\rho + L_f) - L(\rho) \gg 1. \quad (3.22)$$

Учтем также, что характерный поперечный масштаб изменения глубины гофрировки вдоль дрейфовой траектории движения локально-запертых частиц больше величины  $L_f$ , так что

$$L_f(\mathcal{E}) / \frac{\partial}{\partial \rho} (\ln \Gamma) \left| \ll 1. \quad (3.23)$$

При этом в условиях (1.14), (3.22) последним слагаемым левой части (2.91) можно пренебречь и использовать аналитические результаты, полученные в § 2.11.

Экспоненциально быстрое спадание функции  $M_0(y)$  (2.110), (2.111) приводит к тому, что при условии (3.22) дрейфовый поток через данную магнитную поверхность  $\rho = \text{const}$  (2.113) определяется в основном банановыми частицами, локализованными вблизи той же магнитной поверхности. Разлагая поэтому функцию распределения банановых частиц  $f$  в ряд, с учетом (2.110), (2.111) получаем

$$\langle f^L(L, \chi) \rangle_\chi \approx f(L) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial L}. \quad (3.24)$$

При суммировании потоков в верхней и нижней половинах гофра слагаемые, пропорциональные  $f$ , взаимно уничтожаются. В результате имеем (ограничимся рассмотрением электронов)

$$I_\rho \approx 2 \frac{\pi c v_{dr} R_0}{(1 + Z_{ef}) v(\mathcal{E}) me\beta} \Delta^{3/2} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2m}} \frac{\partial f}{\partial \rho}. \quad (3.25)$$

(Здесь введен коэффициент 2, учитывающий оба направления движения частиц вдоль силовой линии.) Поток частиц в этом пределе пропорционален градиенту функции распределения запертых частиц, что соответствует диффузионному переносу. Для получения суммарного потока частиц данной энергии через магнитную поверхность  $\rho = \text{const}$  следует проинтегрировать (3.25) по полному

интервалу изменения  $\mu$  для банановых частиц:

$$\mu_1 = \mathcal{K}/B_{\max} \leq \mu \leq \mu_2 = \mathcal{K}/B_{\min}. \quad (3.26)$$

При этом удобно, используя уравнение траектории (2.63), (2.71) или

$$\mathcal{K} = \mathcal{E} - \mu B(\theta, \rho), \quad (3.27)$$

перейти от  $\mu$  к полоидальному углу  $\theta$ :

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} (\dots) d\mu = \mathcal{K} \int_0^{\pi} (\dots) \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{B} \right) d\theta \approx \mathcal{K} \int (\dots) \frac{e}{B} \sin \theta d\theta.$$

Вводя обозначение [6]

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left( \frac{\delta B_n}{B} \right)^{1/2} d\psi \quad (3.28)$$

и выбирая в качестве  $f$  максвелловскую функцию, получаем следующие выражения для диффузионного потока частиц:

$$d\Gamma_n = - \frac{A}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{C}{eBR_0} \right)^2 \frac{\exp(-\mathcal{K}/T_e)}{(1 + Z_{ef}) \nu(\mathcal{K})} T_e \left( \frac{\mathcal{K}}{T_e} \right)^{1/2} \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \rho} - \frac{e}{T_e} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \left( \frac{3}{2} - \frac{\mathcal{K}}{T_e} \right) \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \rho} \right] d\mathcal{E} \quad (3.29)$$

и тепла

$$d\Gamma_w = - \frac{A}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{C}{eBR_0} \right)^2 \frac{\exp(-\mathcal{K}/T_e)}{(1 + Z_{ef}) \nu(\mathcal{K})} T_e \left( \frac{\mathcal{K}}{T_e} \right)^{1/2} \times \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \rho} - \frac{e}{T_e} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \left( \frac{3}{2} - \frac{\mathcal{K}}{T_e} \right) \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \rho} \right] d\mathcal{E} \quad (3.30)$$

через магнитную поверхность данного радиуса  $\rho$  в интервале энергии  $d\mathcal{E}$ . Появление слагаемых, пропорциональных радиальному электрическому полю, связано с тем, что в (3.25) градиент функции распределения следует вычислять при постоянной полной энергии частиц  $\mathcal{E} = \mathcal{K} - e\Phi$ .

Выражения (3.29), (3.30) согласуются с результатами Коннора и Хасты [6]. Следует подчеркнуть, что диффузионный характер переноса в условиях (1.14), как указывалось в § 1.3, связан не с хаотичностью движения частиц (дрейфовая скорость локально-запертых частиц имеет строго заданные значения и направление), а со спецификой геометрии токамака. Вследствие зеркальной симметрии основная (конвективная) часть потока частиц через данную магнитную поверхность в верхней и нижней половинах тора взаимно компенсируется. Остающаяся нескомпенсированная малая добавка как раз и формирует диффузионный перенос.

Из (3.29), (3.30) видно, что основной вклад в диффузию и теплопроводность вносят быстрые частицы, имеющие энергию в ин-

тервале  $4T_\alpha < \mathcal{K} < 7T_\alpha$ . В этой области энергий в современных токамаках диффузионное приближение фактически не справедливо. Кроме того, в этой области энергий функция распределения как ионов, так и электронов может существенно отличаться от максвелловской. Поэтому коэффициенты переноса в гофрах, основанные на диффузионной теории [5, 6], не имеют реальной области применимости.

### 3.3. Конвективный перенос быстрых ионов

Перейдем теперь к рассмотрению собственно конвективного переноса частиц в локальных гофрах магнитного поля. Начнем рассмотрение с ионов, поскольку именно для этих частиц плазмы конвективный перенос наиболее важен. Достаточно полное кинетическое описание процесса возможно только на основе численного решения полученных выше уравнений. Приведем пример такого расчета, проведенного Ю. Н. Днестровским и А. П. Смирновым для токамака Т-10 [12]\*.

Кинетическая конвекция, обусловленная переносом частиц в гофрах, приводит к сильному перемешиванию частиц по сечению плазменного шнура. Эффективность данного процесса существенно зависит от распределения внутри разряда полей и макроскопических параметров плазмы. В описываемом расчете пренебрегалось влиянием электрического поля и, кроме того, использовалось стандартное распределение основного магнитного поля с круговым сечением магнитных поверхностей. Аспектное соотношение в Т-10 можно считать большим: главный радиус тора на оси разряда  $R_0 = 150$  см, а радиус диафрагмы  $a = 29$  см. Наиболее существенным, с точки зрения ККП, является распределение по сечению плазменного шнура параметров гофрировки (см. § 1.1, 3.1). Из рис. 2, б видно, что во внутренней части тора ( $x < 0$ ) имеются две зеркально-симметричные области (область  $y < 0$  на рисунке не показана), в которых локальные магнитные ямы полностью отсутствуют. Эти области занимают основную часть объема плазмы во внутренней части тора, поэтому при расчете гофрировка здесь принималась полностью отсутствующей. Иначе выглядит распределение глубины гофрировки во внешней части тора,  $x > 0$ . Здесь в интервале  $5 \text{ см} \leq x \leq 29 \text{ см}$  всюду имеется заметная гофрировка. Для процессов ККП существует такой фактор, как изменение величины  $\sqrt{\Delta}/\beta$  (2.103), (3.20) вдоль дрейфовых траекторий локально-запертых частиц, т. е. по вертикали. На рис. 11 сплошными кривыми показана зависимость  $\sqrt{\Delta}/\beta$  от вертикальной координаты  $y$  при разных  $x$ . Видно, что в интервале  $10 \text{ см} \leq x \leq 29 \text{ см}$  эта зависимость довольно слабая. Это позволяет использовать аналитические результаты § 2.11, что существенно упрощает расчет.

\* В [12] расчет проделан также для токамака Т-4.



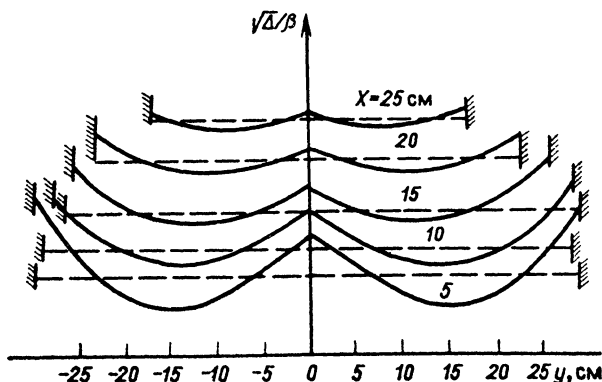


Рис. 11. Изменение величины  $\Gamma = \sqrt{\Delta/\beta}$  вдоль вертикальной координаты  $y$  при некоторых значениях горизонтальной координаты  $x$  на наружной стороне токамака Т-10 (сплошные линии). Пунктиром показано модельное распределение  $\sqrt{\Delta/\beta}$ , используемое в численном расчете

Распределение температуры  $T_i$  и концентрации ионов  $n$  в Т-10 по сечению плазменного шнура задавалось в соответствии с данными наблюдений в виде

$$\left. \begin{aligned} n(\rho) &= n(0) [1 - (\rho/37)^4]^4; \\ T_i(\rho) &= T_i(0) [1 - (\rho/29)^{2.5}]^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

где  $\rho$  — малый радиус, см. Численно решалось уравнение (2.112). Начальные функции распределения брались максвелловскими с распределениями параметров (3.31). Расчет проводился до выхода функций распределения на стационарный уровень.

Типичные результаты расчета функций распределения банановых и пролетных ионов показаны на рис. 12—14. Для примера на рис. 12 показаны энергетические зависимости функций распределения банановых частиц с питч-углом  $\phi = 90^\circ$  на разных магнитных поверхностях  $\rho$  вдоль вертикальной хорды  $x = 11$  см. Начальные (максвелловские) функции распределения даны штриховыми кривыми. Видно, что в центральной части разряда ( $\rho = 11$  см) не происходит заметного искажения функции распределения (в логарифмическом масштабе). Наблюдается только относительно небольшое уменьшение. Совсем иная ситуация возникает на периферийных магнитных поверхностях ( $\rho \geq 18$  см). Здесь функция распределения ионов резко возрастает, начиная с энергии  $\mathcal{E}_0 \sim 1 \div 3$  кэВ. Эти значения энергии ниже характерной энергии дрейфового переноса  $\mathcal{E}_{dri}$  (1.16), которая в условиях Т-10 составляет  $\mathcal{E}_{dri} \approx 4 \div 5$  кэВ. Наклон функций распределения (т. е. эффективная температура) в области энергий  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_{dri}$  на всех кривых практически одинаков, он примерно равен температуре центральной части разряда  $T_i(0)$ . В области же энергий  $\mathcal{E}_0(\rho) < \mathcal{E} \leq$

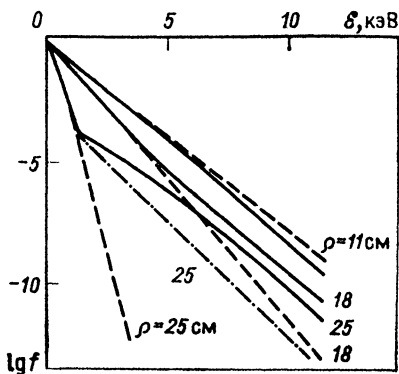


Рис. 12. Функция распределения банановых частиц (ионов) в зависимости от энергии  $\mathcal{E}$  при  $x=11$  см,  $\vartheta=90^\circ$ ,  $s=1+x/R_0 \approx 1,07$  на различных магнитных поверхностях (нормирована на единицу при  $\mathcal{E}=0$ ). Пунктир — начальные максвелловские функции. Штрих — функция распределения пролетных частиц с  $s=0$  ( $\rho=25$  см)

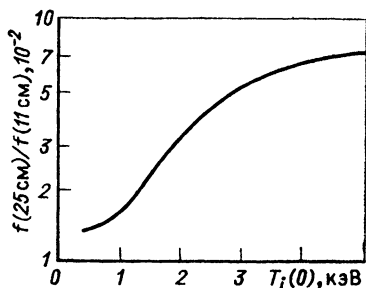


Рис. 13. Зависимость отношения функций распределения ионов на двух магнитных поверхностях,  $\rho=25$  и  $11$  см, для  $x=11$  см,  $\vartheta=90^\circ$  и  $\mathcal{E}=-10$  кэВ от ионной температуры в центре разряда  $T_i(0)$  (в условиях T-10)

$\leq \mathcal{E}_{\text{dri}}$  эффективная температура еще выше, эту область энергий назовем условно областью «плато». Чем дальше от центра расположена магнитная поверхность, тем сильнее здесь искажение функции распределения и тем с меньших значений энергии  $\mathcal{E}_0$  оно начинается. При энергиях  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0(\rho)$  функция распределения на всех периферийных магнитных поверхностях практически не изменяется, так что эффективная температура здесь совпадает с локальной температурой ионов  $T_i(\rho)$ .

Таким образом, видно, что конвективный перенос в гофрах приводит к сильным искажениям функций распределения ионов уже в области относительно небольших энергий. Характер полученных энергетических зависимостей легко понять из простых соображений. Действительно, температура плазмы максимальна в центральной части разряда и заметно падает к его краю. Поэтому число частиц данной энергии  $\mathcal{E} > T_i(0) > T_i(\rho)$  на периферийных магнитных поверхностях экспоненциально мало по сравнению с числом таких частиц в центре плазмы. При этом, начиная с энергий порядка  $\sim \mathcal{E}_{\text{dri}}$  (1.16), происходит сильный вынос локально-запертых частиц из наиболее разогретой центральной части разряда на периферию. Большинство этих частиц вследствие кулоновских соударений переходит в группу банановых частиц и остается на периферийных магнитных поверхностях. Число «приходящих» частиц данной энергии  $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{\text{dri}}$  существенно превосходит равновесный локально-максвелловский уровень «своих» частиц на данной магнитной поверхности. При  $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{\text{dri}}$  локально-запертые час-

тицы, дрейфующие в гофре и выходящие из него на периферию, сохраняют в основном энергетическое распределение наиболее разогретой центральной части разряда. Поэтому эффективная температура здесь примерно равна  $T_i(0)$ . При  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_{dr i}$  число частиц, приходящих из центра разряда, резко уменьшается\*. Однако и здесь функция распределения определяется в основном теми же «приходящими» частицами, энергия которых понизилась вследствие кулоновских соударений с основной массой тепловых частиц на данной магнитной поверхности. Это и приводит к образованию области «плато». Она простирается вниз до энергии  $\mathcal{E}_0(\rho)$ , при которой число «своих» частиц сравнивается с числом «приходящих» извне и охладившихся в результате кулоновских соударений (см. § 1.5). С логарифмической точностью значение  $\mathcal{E}_0$  можно оценить так:

$$\mathcal{E}_0 \approx T_i(\rho) \frac{r \mathcal{E}_{dr i}}{T_i(0)}. \quad (3.32)$$

Оценка (3.32) неплохо согласуется с расчетными значениями  $\mathcal{E}_0$  (рис. 12).

Эффективность выноса ионов из центральной части разряда на периферию проиллюстрирована также на рис. 13, где показано изменение отношения функции распределения частиц фиксированной энергии на дальней периферии к соответствующей функции распределения в центральной области разряда в зависимости от температуры в центре шнура  $T_i(0)$ . Видно, что это отношение быстро нарастает с ростом  $T_i(0)$  и достигает примерно 7% для  $T_i(0) = 5$  кэВ. Это на много порядков выше аналогичного отношения для равновесных максвелловских функций.

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению, отметим следующее обстоятельство. Наиболее разогретой частью разряда согласно (3.3) является его центр, лежащий на магнитной оси  $\rho = 0$ . Однако вертикальный дрейфовый перенос локально-запертых частиц непосредственно из  $\rho = 0$  на дальнюю периферию отсутствует. Это связано с особенностями в распределении относительной глубины гофрировки (см. рис. 2, б). Оптимальный перенос смещен в наружную часть тора, он происходит примерно вдоль хорды  $x \approx 10$  см. Действительно, на магнитной поверхности  $x = 10$  см температура ионов согласно (3.31) еще близка к максимальной, и в то же время относительная глубина гофрировки при  $x \geq 10$  см уже достаточно велика (см. рис. 11). Рассмотренные выше банановые частицы обладают питч-углом  $\phi = 90^\circ$  на хорде  $x = 11$  см. Их функция распределения практически равна функции распределения тех локально-запертых частиц, которые вовлечены в наиболее интенсивный перенос. Поэтому ясно, что функция распределения банановых частиц претерпевает большие изменения в результате конвективного переноса. Однако встает вопрос о том,

\* Подробнее это будет обсуждаться в § 3.4, посвященном конвективному переносу электронов.

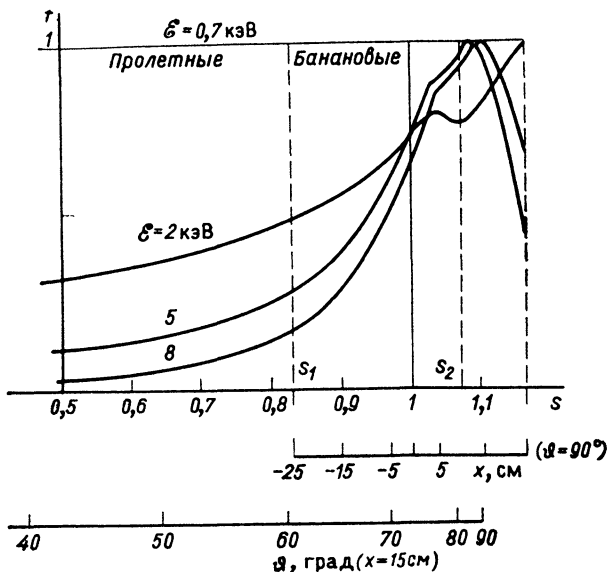


Рис. 14. Зависимость функции распределения запертых и пролетных ионов от  $s$  при  $\rho=25$  см и различных значениях  $\mathcal{E}$  (нормирована на единицу при максимальном значении). Кроме  $s$ , показаны также питч-углы  $\vartheta$  (для  $x=15$  см) и координаты  $x$  для  $\vartheta=90^\circ$  (банановые частицы). Значения  $s=s_1$  соответствуют границе в фазовом пространстве между банановыми и пролетными частицами (при  $x=15$  см)

как ведет себя функция распределения банановых и пролетных частиц в других областях разряда и с другими значениями питч-угла.

Прежде чем на него ответить, напомним, что функция распределения банановых и пролетных частиц на данной магнитной поверхности  $\rho=\text{const}$  зависит не по отдельности от величин  $\vartheta$ ,  $x$ , а от их комбинации — адиабатно-инвариантной переменной  $s$  (2.93):

$$s = (x/R_0) \sin^2 \vartheta. \quad (3.33)$$

Поэтому, зная зависимость функции распределения от  $s$ ,  $\rho$ , легко установить ее питч-угловую зависимость (в фиксированной точке плазменного шнура) или координатное распределение (при заданном питч-угле). Пример такой зависимости дан на рис. 14. Зависимость функции распределения от  $s$  показана здесь уже в абсолютном, а не логарифмическом масштабе. Внизу даны шкалы, показывающие зависимости от  $x$  при фиксированном питч-угле  $\vartheta=90^\circ$  и зависимость от питч-угла  $\vartheta$  в точке  $x=15$  см,  $y=20$  см. Граница  $s=s_1=1-\varepsilon \approx 0,84$  отвечает сепаратрисе, разделяющей банановые ( $s \geq s_1$ ) и пролетные ( $s < s_1$ ) частицы. Значение  $s=s_2 \approx 1,07$  соответствует оптимальному переносу локально-запертых частиц ( $\vartheta=90^\circ$ ,  $x \approx 11$  см).

Из этого рисунка видно, что при  $\mathcal{E} = 0.7$  кэВ зависимости от  $s$  фактически нет. Эта энергия меньше  $\mathcal{E}_0$  (25 см)  $\approx 1,2$  кэВ. Функция распределения здесь локально-максвелловская. При больших значениях энергии появляется зависимость от  $s$ , а при  $\mathcal{E} \geq 5$  кэВ возникает четкий максимум в точке  $s=s_2$ , отвечающий наиболее интенсивному переносу. В обе стороны от этого значения происходит спад функции распределения. Этот спад несколько увеличивается с ростом  $\mathcal{E}$  в интервале  $5 \text{ кэВ} < \mathcal{E} < 10 \text{ кэВ}$ . При больших энергиях зависимости от  $s$  остаются подобными. Это легко видеть из рис. 12, где штрихпунктирной линией показана энергетическая зависимость функции распределения пролетных частиц с  $s=0$ , обладающих наименьшим питч-углом. Видно, что при  $\mathcal{E} \geq 10$  кэВ их эффективная температура практически та же, что и для банановых частиц с максимальной функцией распределения ( $s=s_2$ ). Этот факт связан с важной ролью кулоновских соударений, приводящих к сильному рассеянию частиц по углам в фазовом пространстве (с аналогичным явлением мы еще столкнемся в § 3.4 при рассмотрении электронной функции распределения).

Если рассматривать банановые частицы с фиксированным питч-углом  $\theta=90^\circ$ , то согласно (3.33)  $x=sR_0$  и с помощью промежуточной шкалы на рис. 14 можно определить пространственный ход функции распределения на магнитной поверхности  $\rho=25$  см. Видно, что значительное обогащение периферийных магнитных поверхностей быстрыми частицами из центра разряда происходит на всей магнитной поверхности. Это касается и внутренней части тора  $x < 0$ , где в нашем расчете считалось, что гофрировка отсутствует. Разумеется, остается небольшая асимметрия, связанная просто со смещением линии оптимального переноса в наружную часть разряда.

Выше рассматривались лишь пролетные и банановые частицы. Энергетическое распределение локально-запертых ионов на данной магнитной поверхности при фиксированном  $x$  показано на рис. 15. Здесь  $\langle f_1 \rangle_x$  — функция распределения в верхней (2.114), а  $\langle f_2 \rangle_x$  — в нижней (2.115) половинах тора (тороидальный дрейф в расчетах предполагается, как всегда, направленным вверх). Видно, что значения  $\langle f_1 \rangle_x$  и  $\langle f_2 \rangle_x$  при достаточно высоких энергиях  $\mathcal{E}$  различаются на порядок и более. Таким образом, локально-запертые ионы благодаря тороидальному дрейфу имеют очень резкую асимметрию «верх—низ». Она усиливается с ростом энергии ионов. Подчеркнем, что и эффективная температура, определенная по наклону функций распределения  $\langle f_1 \rangle_x$  и  $\langle f_2 \rangle_x$ , имеет при энергиях  $2 \text{ кэВ} \lesssim \mathcal{E} \lesssim 8 \text{ кэВ}$  заметную асимметрию «верх—низ». Пунктиром на рис. 15 показано соответствующее значение функции распределения банановых частиц  $f^b$  при  $\theta=90^\circ$ , т. е. на границе с локально-запертыми частицами. Величина  $f^b$ , как и следовало ожидать, лежит между  $\langle f_1 \rangle_x$  и  $\langle f_2 \rangle_x$ . Отметим, что величины  $\langle f_1 \rangle_x$  и  $\langle f_2 \rangle_x$  представляют собой функции распределения, усредненные по малому интервалу питч-углов, соответствующему локально-запертым частицам. Внутри этого интервала абсолютные

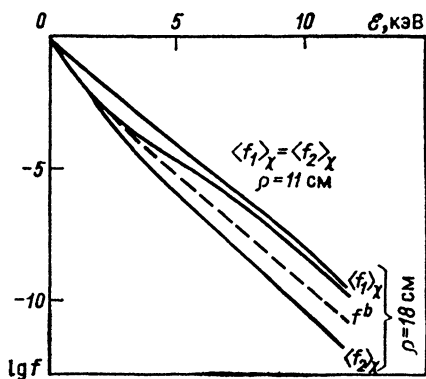


Рис. 15. Функция распределения локально-запертых ионов в верхней  $\langle f_1 \rangle_x$  и нижней  $\langle f_2 \rangle_x$  половинах тора (дрейф направлен вверх) при  $x=11$  см,  $\rho=11$  и  $18$  см (сплошные кривые). Пунктир — функция распределения банановых частиц  $f^b$  для  $x=11$ ,  $\rho=18$ ,  $\theta=90^\circ$  (см. рис. 12)

значения функции распределения могут изменяться довольно сильно. Так, вблизи границы захвата в гофр функции распределения локально-запертых частиц приближаются к функции распределения банановых частиц.

Все описанные здесь особенности были выявлены и при аналогичных расчетах как для других режимов работы Т-10, так и для других токамаков [12]\*. При этом важно только, чтобы распределение глубины гофрировки допускало дрейфовый перенос из области центральных магнитных поверхностей. Конкретное значение глубины локальных магнитных ям не столь уж существенно [12]. Следует, однако, иметь в виду, что мы здесь пренебрегали изменением величины  $\sqrt{\Delta}/\beta$  вдоль дрейфовых траекторий и действием электрического поля. Если этого сделать нельзя, то важную роль могут играть процессы адиабатического захвата и выноса частиц (см. § 3.5).

### 3.4. Перенос быстрых электронов

Конвективный перенос в гофрах быстрых электронов качественно обладает теми же особенностями, что и ионный перенос. Имеются, однако, и существенные отличия. Во-первых, характерная «пороговая» энергия конвективного дрейфового переноса для электронов  $\mathcal{E}_{\text{dri}}$  (1.16) в  $(m_i/m)^{1/5} \approx 4 \div 5$  раз выше аналогичной величины для ионов. Поэтому эффекты, связанные с кинетической конвекцией, для электронов разыгрываются в области более высоких энергий. С другой стороны, функция распределения надтепловых электронов и в отсутствие каких-либо видов переноса может сильно отличаться от равновесной максвелловской функции вследствие действия ускоряющего электрического поля. В настоящем параграфе будет обсуждено влияние обоих этих эффектов.

\* Часть из них подтверждена на опыте в работах М. П. Петрова, А. Б. Извозчиков и др. [12, 49—52].

**Функция распределения энергичных электронов в центре плазменного шнура.** В центральной области плазменного шнура в токамаке влияние конвективного переноса малосущественно, так что возмущения функции распределения электронов целиком определяются действием продольного электрического поля. Как известно, оно приводит к сильным искажениям электронной функции распределения: появляется шнур убегающих электронов, и функция распределения в области сверхтепловых скоростей существенно превышает равновесное максвелловское значение. Степень данного эффекта зависит от параметра

$$\gamma = E_{\parallel} / E_c, \quad (3.34)$$

где  $E_c$  — напряженность критического поля убегания [19]:

$$E_c = 4\pi e^3 n \ln \Lambda / T_e. \quad (3.35)$$

В обычном режиме токамака параметр  $\gamma \ll 1$ . В этом случае основная часть электронов находится в тепловом равновесии (т. е. обладает практически максвелловской функцией распределения), заметные искажения функции распределения происходят только в области сверхтепловых энергий. Область энергий до границы убегания

$$T_e \ll \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_c; \quad \mathcal{E}_c = T_e / (2\gamma) \quad (3.36)$$

исследована достаточно подробно, соответствующие результаты хорошо известны [13, 19—21, 23, 24]. При этом в экспоненциальном приближении в области  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$  (3.36) функция распределения определяется выражением

$$\begin{aligned} f(\mathcal{E}, \vartheta) \approx Cn \left( \frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\mathcal{E}}{T_e} + \gamma \left( \frac{\mathcal{E}}{T_e} \right)^2 + \right. \\ \left. + 8 \sqrt{\frac{\gamma}{1+Z_{ef}}} \frac{\mathcal{E}}{T_e} \left( 1 - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{1+\cos \vartheta}{2} \right)^{1/2} - 1 \right] - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{1+Z_{ef}}{\gamma}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (3.37) \end{aligned}$$

Видно, что при  $\gamma \ll 1$  наличие ускоряющего поля приводит к значительному возрастанию функции распределения. Например, при  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c = T_e / (2\gamma)$  функция распределения электронов примерно в  $\exp(1/4\gamma)$  раз больше, чем равновесное максвелловское значение  $f_M \sim \exp(-1/2\gamma)$ . При энергиях  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$  достаточно подробно исследовалась область направлений скоростей частиц, близких к направлению ускоряющего поля ( $\vartheta \ll 1$ ), где значение функции распределения максимально (шнур убегающих электронов). Электроны здесь вовлечены в постоянное ускорение электрическим полем, которое уже не может сдерживаться кулоновскими соударениями. Функция распределения при  $\vartheta \approx 0^\circ$  образует как бы «плато» по энергиям. Имеется только достаточно медленное

( $\sim (\ln \mathcal{E})^{-1}$ ) спадание, обусловленное слабым расширением шнура убегающих электронов из-за кулоновских соударений.

С точки зрения ККП, однако, важен вид энергетического распределения при больших питч-углах ( $\theta \approx 90^\circ$ ). Соответствующая функция распределения электронов в области энергий  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$  при произвольных питч-углах  $\theta$  была получена в [22]. Приведем краткий вывод результатов, поскольку они малоизвестны.

Стационарное решение кинетического уравнения в области энергий  $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c$  вне шнура убегающих электронов удобно искать в экспоненциальной форме:

$$f = n \left( \frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp[\tilde{\varphi}(z, \tilde{\mu}) - F(\gamma)]; \quad (3.38)$$

$$\tilde{\mu} = \cos \theta; \quad z = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} = \frac{2\gamma}{T_e} \mathcal{E} \gg 1; \quad (3.39)$$

$$\tilde{\varphi}(z, \tilde{\mu}) = -z\tilde{\varphi}_0(\tilde{\mu}) + \tilde{\varphi}_1(\tilde{\mu}) \ln z + \tilde{\varphi}_2(\tilde{\mu}) + \dots \quad (3.40)$$

Кинетическое уравнение (2.85) в приосевой области плазменного шнура, как и в однородной плазме, в переменных  $\tilde{\mu}, z$  (3.39) принимает следующий вид [24]:

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mu}z^2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} + z(1 - \tilde{\mu}^2) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\mu}} - 4\gamma z \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \right)^2 - 4\gamma z \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} + \\ + 2h \left( 1 - \frac{\gamma}{2z} \right) \left[ 2\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\mu}} - (1 - \tilde{\mu}^2) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\mu}^2} - (1 - \tilde{\mu}^2) \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\mu}} \right)^2 \right] = 0, \\ h = (1 + Z_{ei})/2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Подставив (3.38)–(3.40) в (3.41), получим при условии  $z \gg 1$

$$\frac{d\tilde{\varphi}_0}{d\tilde{\mu}} = -\frac{1}{2h} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{8\tilde{\mu}h\tilde{\varphi}_0(\tilde{\mu})}{1 - \tilde{\mu}^2} \right)^{1/2} \right], \quad \tilde{\varphi}_1 = \text{const}. \quad (3.42)$$

Разложение (3.40) справедливо в области

$$1/z^2 \ll \tilde{\mu} + 1, \quad \tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0, \quad (3.43)$$

где  $\tilde{\mu}_0$  — корень уравнения  $1 - \tilde{\mu}^2 - 8\tilde{\mu}h\tilde{\varphi}_0(\tilde{\mu}) = 0$ .

Область питч-углов, определяемая условиями (3.43), достаточно протяженная, она всегда включает в себя точку  $\theta = 90^\circ$  и достаточно близко подходит к точке  $\theta = 180^\circ$ . Область питч-углов  $0^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$  является переходной от области (3.43) с квазимаксвелловским распределением (3.40) к области шнура убегающих электронов. В близкой окрестности точки  $\theta = 180^\circ$  ( $\tilde{\mu} = -1$ ) при условии (3.39) решение следует искать в виде

$$\tilde{\varphi} = -z\tilde{\psi}_0(\zeta) + \tilde{\psi}_1(\zeta) + \dots, \quad \zeta = z\sqrt{1 + \tilde{\mu}}. \quad (3.44)$$

Разложения (3.40), (3.44) должны сшиваться в области

$$1/z^2 \ll 1 + \tilde{\mu} \ll 1. \quad (3.45)$$



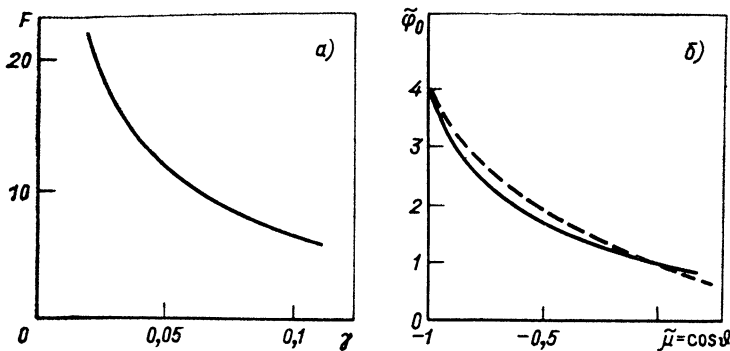


Рис. 16. Зависимость функции  $F$  (3.38) от параметра  $\gamma$  (3.34) (а) и «универсальная» функция  $\varphi_0$  (3.40) (б):

— результат решения уравнения (3.42); ---- решение полной задачи

Подставляя (3.44) в (3.41) и сравнивая (3.40), (3.42) и (3.44), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= -1/2; & \psi_0 &= \text{const} = \tilde{\varphi}_0(-1); \\ \psi_1 &= \ln I_0(2\sqrt{\tilde{\varphi}_0(-1)/h}), \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

где  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя;

$$I_0(0) = 1, \quad I_0(x \gg 1) \approx \sqrt{2/(\pi x)} e^x. \quad (3.47)$$

Для определения «универсальной» функции  $\tilde{\varphi}_0(\tilde{\mu})$  необходимо сформулировать начальное условие для уравнения (3.42) и проинтегрировать это уравнение. Начальное условие следует при этом задать в точке  $\tilde{\mu}_1$ , достаточно удаленной от особой точки  $\tilde{\mu} = -1(1 + \tilde{\mu}_1 \gg 1/z^2)$ :

$$\tilde{\varphi}_0(\tilde{\mu}_1) \approx \varphi_0(-1) - 2\sqrt{\tilde{\varphi}_0(-1)/h} \sqrt{1 + \tilde{\mu}_1}. \quad (3.48)$$

Таким образом, чтобы найти окончательный вид функции распределения в области высоких энергий электронов  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$ , необходимо знать два параметра:  $\tilde{\varphi}_0(-1)$  и  $F(\gamma)$  [см. (3.38)]. Оба они брались из шивки с результатом прямого численного интегрирования кинетического уравнения. При этом оказалось, что  $\tilde{\varphi}_0(-1) \approx 4$  — универсальная константа, а функция  $F(\gamma)$  имеет вид, представленный на рис. 16, а. В основной экспоненциальной части она, естественно, согласуется с выражением, следующим из (3.37) при  $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_c$ .

Функция  $\tilde{\varphi}_0(\tilde{\mu})$  для  $Z_{\text{ef}} = 1$  ( $h = 1$ ), полученная с помощью формул (3.44), (3.46) на отрезке  $1 \leq \tilde{\mu} \leq \tilde{\mu}_1$  и численного интегрирования уравнения (3.42) на отрезке  $\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu} \leq \tilde{\mu}_0 \sim 0,2$ , приведена на рис. 16, б сплошной кривой. Здесь же штрихпунктиром нарисова-

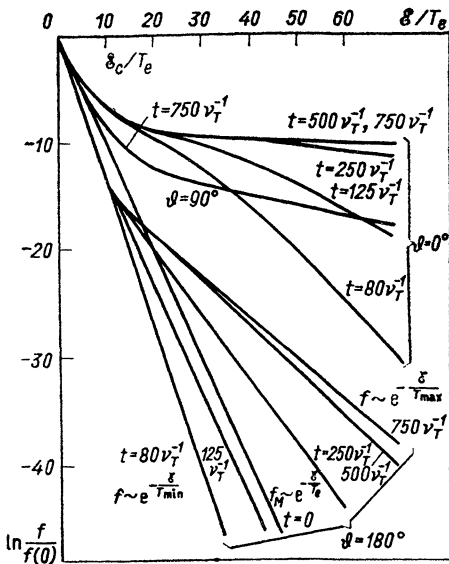


Рис. 17. Функция распределения быстрых электронов и динамика ее установления при разных углах  $\vartheta$  (решение полной задачи),  $\gamma=0,05$ . Время установления  $t$  выражено через  $\nu_T^{-1} = \nu_e$  ( $\nu_T$ )

на кривая, соответствующая численному решению полной задачи. Видно хорошее соответствие кривых.

Аналогично можно определить следующее приближение  $\varphi_2$ . Мы не будем приводить соответствующих результатов. Отметим только, что на интервале  $-1 < \mu < \mu_0$  величина  $|\varphi_2(\mu)| \leq 1$ , что также полностью согласуется с выявленными в численном расчете особенностями функции распределения.

Результаты численного интегрирования даны на рис. 17. Здесь же показана динамика установления стационарной функции распределения. Характер установившейся функции распределения хорошо согласуется с аналитическими результатами.

Таким образом, при высоких энергиях ( $E > E_c$ ) в области питч-углов  $80^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$  функция распределения (3.38), (3.40), (3.44) подчиняется универсальному закону: она является квази-максвелловской [основной член пропорционален  $\exp(-E/T_{ef})$ ] с эффективной температурой  $T_{ef}$ , зависящей от питч-угла  $\vartheta$ :

$$T_{ef} = \frac{T_e}{2\gamma\tilde{\varphi}_0(\mu)} = \frac{E_c}{\tilde{\varphi}_0(\mu)} = \frac{2\pi e^3 n \ln \Lambda}{E_{\parallel} \tilde{\varphi}_0(\cos \vartheta)}. \quad (3.49)$$

Интересно, что  $T_{ef}$  не зависит от температуры основной части электронов  $T_e$ , причем  $T_{ef}$  растет с ростом концентрации плазмы и с уменьшением напряженности ускоряющего электрического поля\*. При этом всегда  $T_{ef} \gg T_e$ , более точно  $T_{ef} \sim E_c$ . Так,

$$\text{при } \vartheta = 90^\circ \quad T_{ef} \approx 1,1E_c, \quad \text{при } \vartheta \approx 180^\circ \quad T_{ef} \approx 0,25E_c. \quad (3.50)$$

Численный расчет [22] в достаточно широком интервале  $\gamma$  показал, что  $\tilde{\varphi}_0$  не зависит от  $\gamma$ , т. е. действительно является универсальной функцией угла  $\vartheta$ .

\* Заметим, однако, что чем меньше это поле, тем выше энергия  $E_c$  и тем медленней происходит установление рассмотренной стационарной функции распределения в области  $E > E_c$ . Время установления  $\tau_c \sim \left(\frac{E_c}{T_e}\right)^{3/2} \frac{1}{\nu_T}$ , где  $\nu_T = \nu_e(\nu_T)$  (1.11), (2.14) — частота соударений тепловых электронов (см. рис. 17).

Таким образом, электрическое поле эффективно разогревает плазму во всех направлениях, включая и направление  $\theta=180^\circ$ , противоположное  $E$ . Причина такого удивительного поведения функции распределения крайне проста: она состоит в рассеянии по углам убегающих электронов из-за их соударений с тепловыми электронами и ионами плазмы. Хотя частота кулоновских соударений и падает с ростом энергии, роль этих соударений весьма важна для любых сколь угодно высоких энергий. При этом хотя функция распределения при большихpitch-углах всегда экспоненциально мала по сравнению с функцией распределения в области шнура убегающих электронов, она на много порядков может превосходить равновесную максвелловскую функцию распределения, обладая к тому же существенно большей эффективной температурой.

Итак, функцию распределения частиц с  $\theta \approx 90^\circ$  в экспоненциальном приближении можно аппроксимировать выражением (3.37) при  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$

$$\ln \left[ \frac{f}{n} \left( \frac{2\pi T_e}{m} \right)^{3/2} \right] \approx \ln C - \frac{\mathcal{E}}{T_e} + \gamma \left( \frac{\mathcal{E}}{T_e} \right)^2 - 2,34 \sqrt{\frac{\gamma}{1+Z_{ef}}} \times \\ \times \frac{\mathcal{E}}{T_e} \left( 1 - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{1+Z_{ef}}{\gamma}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \right)^{1/2} \right] \quad (3.51)$$

и при  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$  [ср. с (3.38), (3.40)]

$$\ln \left[ \frac{f}{n} \left( \frac{2\pi T_e}{m} \right)^{3/2} \right] \approx -0,9 (\mathcal{E}/\mathcal{E}_c) + \frac{\ln(\mathcal{E}/\mathcal{E}_c)}{2} - F(\gamma), \quad (3.52)$$

где  $\mathcal{E}_c$  определено равенством (3.36). При  $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_c$  выражения (3.51) и (3.52) можно считать в экспоненциальном приближении совпадающими, что дает возможность определить константу  $C$ :

$$C \approx \exp \left\{ \frac{1}{4\gamma} + \sqrt{\frac{1+Z_{ef}}{\gamma}} - 0,9 - F(\gamma) \right\}. \quad (3.53)$$

В заключение заметим, что наряду с действием среднего продольного ускоряющего поля  $E_{\parallel}$  заметное влияние на функцию распределения быстрых электронов в центральной области разряда могут оказать короткие резкие выбросы поля, связанные с так называемой пичковой (или дисруптивной) неустойчивостью [25].

**Обогащение периферийных магнитных поверхностей энергичными электронами.** Перейдем теперь к рассмотрению конвективного переноса электронов в локальных гофрах магнитного поля. По своим основным качественным характеристикам он в целом подобен ионному переносу. Проведем здесь вначале аналитический расчет, основанный на упрощенной модели.

Будем считать, что в центре плазменного разряда имеется ярко выраженный максимум электронной температуры  $T_{e \max} = T_e(0)$  и соответственно максимум величины  $\gamma$  (3.34) (изменение концентрации плазмы является обычно более плавным). Поэтому в от-

сутствие переноса функция распределения частиц достаточно высокой энергии  $\mathcal{E} \gg T_{e \max}$  имеет очень острый пик в центре разряда и экспоненциально сильно спадает к его периферии. Как показывают численные расчеты для ионов (см. § 3.3) и для электронов, такая структура, в принципе, остается при наличии ККП. Функция распределения на периферии хотя и значительно возрастает, но остается все же гораздо меньше функции распределения в центральной части разряда. Функция распределения в центре при этом уменьшается из-за ухода частиц, однако это уменьшение в логарифмическом масштабе не очень существенно (см. рис. 12). Поэтому в нулевом приближении можно считать функцию распределения в центре разряда заданной и равной ее невозмущенному значению в отсутствие переноса. Соответствующие приближенные выражения приведены выше [(3.51), (3.52)].

Расчет изменения функции распределения электронов на периферии будем проводить в рамках уравнения (2.112), предполагая выполненными все необходимые условия (вертикальность дрейфа, однородность параметров гофрировки вдоль дрейфовой траектории, быстрое установление функции распределения локально-запертых частиц). Заметим, что пренебрежение внутренними электрическими полями разделения зарядов (вертикальность дрейфа) для электронов более оправдано, поскольку интересующая нас область энергий для этих частиц расположена выше, чем для ионов. Предположим также, что распределение параметров гофрировки по горизонтали таково, что допускает конвективный перенос частиц из приосевой области разряда.

Функция распределения в центре разряда при этом является заданным источником частиц для периферийных магнитных поверхностей, локализованных при  $\rho = 0$ . Поскольку в перенос вовлекаются частицы с питч-углом  $\vartheta \approx 90^\circ$ , то данный источник частиц сконцентрирован вблизи значения  $s = 1$  (2.93).

Рассмотрим уравнение (2.112) для данной периферийной магнитной поверхности  $\rho$ . В интегральном члене, описывающем перенос в гофрах, основной вклад дает окрестность точки  $\rho = 0$ , где имеется резкий пик функции распределения  $f$ . Учитывая это, получаем в стационарном случае кинетическое уравнение для функции распределения банановых частиц на магнитной поверхности  $\rho$  в виде

$$\frac{J_1^*}{2h} \mathcal{E} (f'_{\mathcal{E}} + T_e(\rho) f''_{\mathcal{E}\mathcal{E}}) + \frac{\partial}{\partial s} \left( s J_2^* \frac{\partial f}{\partial s} \right) = - \frac{\mathcal{E} \tilde{Q}}{h} (\mathcal{E}, s) \delta(s-1); \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\mathcal{E}, s) = & \frac{k(\rho)h}{4\beta \sqrt{\pi} \Delta \mathcal{E}} \left( \frac{\Delta \rho}{\rho} \right)^2 \left[ \left( \frac{\mathcal{E}_{dr}}{\mathcal{E}} \right)^{3/4} + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{dr}} \right)^{3/4} \right] \times \\ & \times \exp \left[ - \left( \frac{\mathcal{E}_{dr}}{\mathcal{E}} \right)^{5/2} \right] f_0(\mathcal{E}); \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\mathcal{E}_{dr}(\rho) = \frac{e^2}{2} \left[ \frac{16\pi h B R_0 \ln \Lambda}{c \sqrt{m} \Delta} \int_0^\rho n d\rho' \right]^{2/5}; \quad (3.56)$$

$$k(\rho) = \rho n(0) \int_0^{\rho} n \tilde{\rho} \sim 1; \quad (3.57)$$

$$(\Delta\rho)^2 = \frac{1}{f_0(\mathcal{E})} \int_0^{\alpha} f_0(\mathcal{E}, s-1, \tilde{\rho}) \tilde{\rho} d\tilde{\rho}. \quad (3.58)$$

Здесь  $f_0$  — заданная функция распределения частиц с  $\theta=90^\circ$  в центре плазменного шнура;  $\Delta\rho$  — эффективная ширина пика функции распределения; предполагается, что радиус данной магнитной поверхности  $\rho \gg \Delta\rho$ . При получении (3.54) — (3.58) использована аппроксимация (2.111а);  $\delta(s-1)$  в левой части (3.54) — это  $\delta$ -функция.

Из (3.55) видно, что источник  $\tilde{Q}$  имеет оптимум при некоторой энергии  $\mathcal{E}_1$ :

$$\left(\frac{5}{2} \frac{T_e(0)}{\mathcal{E}_{dr}}\right)^{2/3}, \quad \mathcal{E}_{dr} < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_{dr}, \quad \mathcal{E}_{dr} \gg T_e(0). \quad (3.59)$$

При меньших значениях энергии наблюдается резкий спад, связанный с уменьшением длины свободного дрейфового пробега в гофре  $l_{dr} \sim (\mathcal{E}/\mathcal{E}_{dr})^{5/2} \rho$  (1.12). Спад в сторону больших энергий  $\mathcal{E}$  обусловлен быстрым уменьшением функции распределения  $f_0$ . Тот факт, что характерная энергия оптимального переноса  $\mathcal{E}_1$  меньше  $\mathcal{E}_{dr}(\rho)$  (обычно в 1,5—2 раза), как раз и связан с энергетической зависимостью функции распределения  $f_0$ .

Уравнение (3.54) справедливо для банановых частиц, соответствующих интервалу

$$1 - \varepsilon \leq s \leq 1 + \varepsilon. \quad (3.60)$$

Как будет показано ниже, избыток функции распределения, обусловленный приходящими из центра частицами, резко спадает в обе стороны от значения  $s=1$ . В силу этого область пролетных частиц

$$s < 1 - \varepsilon, \quad (3.61)$$

где необходимо учитывать продольное электрическое поле  $E_{\parallel}$ , не оказывает заметного влияния на основную группу быстрых частиц. Поэтому уравнение (3.54), в левой части которого имеется только интеграл кулоновских соударений, можно формально считать применимым во всем интервале изменения  $s$ :  $0 \leq s \leq 1 + \varepsilon$ .

Выделим невозмущенное значение функции распределения на данной магнитной поверхности  $f_0$  и добавку  $\Delta f$ :

$$f = f_0(\rho, \mathcal{E}, s) + \Delta f(\rho, \mathcal{E}, s). \quad (3.62)$$

Наиболее просто выглядит решение уравнения (3.54) для функции распределения по энергии  $\mathcal{E}$ , т. е. для проинтегрированной по телесному углу в пространстве скоростей и усредненной по полои-

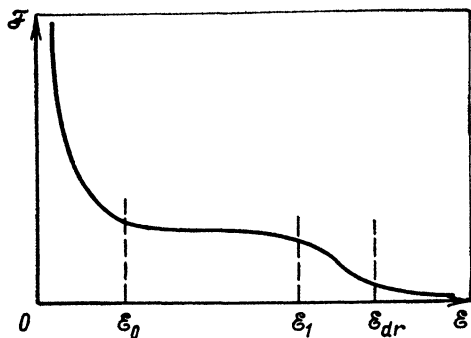


Рис. 18. Эффект образования плато на хвосте функции распределения электронов

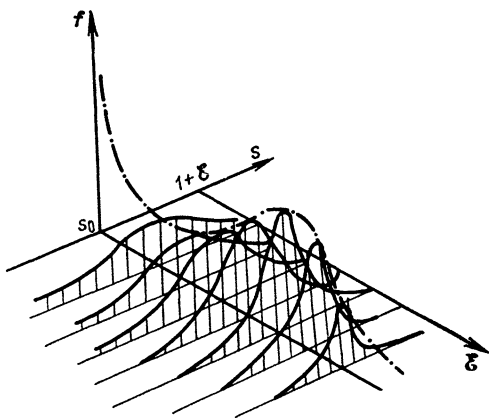


Рис. 19. Качественный вид функции распределения быстрых электронов на периферийной магнитной поверхности в зависимости от  $\mathcal{E}$  и  $s$

дальному углу  $\vartheta$  добавки  $\Delta f$ :

$$\langle \Delta f \rangle_{\theta, \vartheta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} d\theta \cdot 2\pi \int \Delta f \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi \int_0^{1+\varepsilon} J_1^*(s) \Delta f ds. \quad (3.63)$$

Из (3.54), (3.62) легко получить, что

$$\langle \Delta f \rangle_{\theta, \vartheta} = \int_0^{\mathcal{E}} \tilde{Q}(\tilde{\mathcal{E}}) \exp\left(\frac{\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E}}{T_e(\rho)}\right) d\tilde{\mathcal{E}} + \int_{\mathcal{E}}^{\infty} \tilde{Q}(\tilde{\mathcal{E}}) d\tilde{\mathcal{E}}. \quad (3.64)$$

При условии  $T_e(0) \gg T_e(\rho)$  первое слагаемое, обусловленное диффузией по энергиям, обычно мало по сравнению со вторым, которое описывает охлаждение быстрых приходящих частиц из-за соударений с основной массой тепловых электронов на данной магнитной поверхности. Качественный вид усредненной функции распределения  $\mathcal{F} = f_0 + \langle \Delta f \rangle_{\theta, \vartheta}$  согласно (3.63) показан на рис. 18. При  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_1$  она практически повторяет наклон функции распределения горячих электронов в центре разряда. При  $\mathcal{E}_0 \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_1$  образуется «плато» (см. § 3.3). Здесь имеется поток быстрых частиц в фазовом пространстве, направленный в сторону малых энергий. При энергии  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$  значение  $\langle \Delta f \rangle_{\theta, \vartheta}$  становится меньше невозмущенного значения  $f_0$ . Приближенная аналитическая зависимость функции распределения от  $s$ , приведенная в [16], имеет достаточно громоздкий вид, поэтому ограничимся только качественным ее описанием.

Функция распределения  $f(\rho, \mathcal{E}, s)$  представляет собой узкий «хребет» с гребнем при значении  $s=1$ , отвечающим наиболее ин-

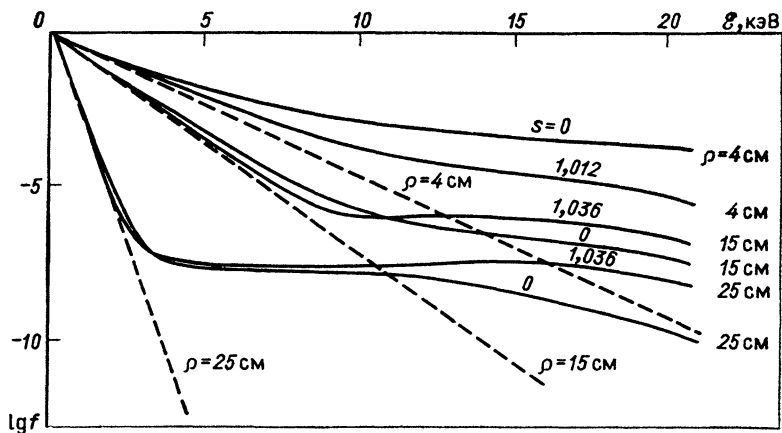


Рис. 20. Функция распределения быстрых электронов (банановые частицы) в зависимости от энергии  $\mathcal{E}$  при  $x=11$  см,  $\vartheta=90^\circ$  и различных значениях  $s$  на разных магнитных поверхностях (результат численного значения расчета):  $n(0)=2,5 \cdot 10^{13}$  см $^{-3}$ ;  $T(0)=1$  кэВ;  $Z_{ef}=1,5$ ;  $\gamma=0,02$

тенсивному переносу из центра плазменного шнура (рис. 19). Ширина этого «хребта» по  $s$

$$\Delta s \sim 2 \sqrt{\epsilon h \ln(\mathcal{E}_1/\mathcal{E})} \gg \Delta \rho / R_0 \quad (3.65)$$

логарифмически медленно растет с уменьшением энергии. Переходя от переменной  $s$  к полоидальному углу  $\theta$  и питч-углу частицы  $\vartheta$ , убеждаемся, что при данном значении  $\theta$  в области энергий  $\mathcal{E}_0 \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_1$  («плато») функция распределения резко анизотропна по питч-углу  $\vartheta$  с максимумами вблизи

$$\vartheta_{1,2} = \frac{\pi}{2} \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon \cos \theta}}. \quad (3.66)$$

Оба эти максимума четко разделены на наружной стороне тора и сливаются при  $\theta=90^\circ$ . На внутренней стороне тора эффект анизотропии экспоненциально резко уменьшается. Причина этого состоит в следующем. Максимумы функции распределения по  $\vartheta$  (3.66) формируются частицами с  $s=1$ , приходящими из наиболее разогретой центральной области плазменного шнура. Банановые траектории таких частиц имеют точки отражения при  $\theta \approx 90^\circ$ . Поэтому они могут проникать на внутреннюю часть тора только в результате питч-углового рассеяния из-за кулоновских соударений. Функция распределения при этом экспоненциально спадает с эффективной шириной  $\Delta \vartheta \sim \Delta s$  (3.65)\*.

Отмеченные здесь основные особенности функции распределения быстрых электронов в условиях ККП подтверждаются и чис-

\* Некоторые из отмеченных здесь особенностей поведения сверхтепловых электронов наблюдались в экспериментах К. А. Разумовой и др. [14].

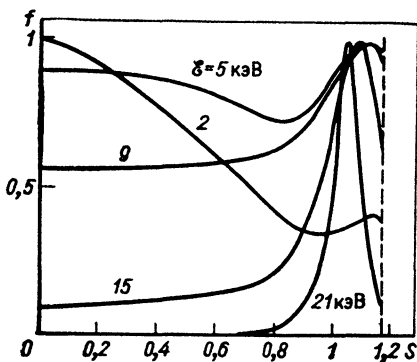


Рис. 21. Зависимость функции распределения запертых и пролетных электронов от  $s$  при  $\rho = 25$  см и различных значениях  $\epsilon$

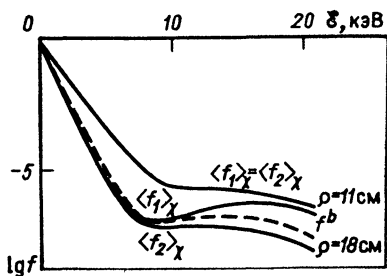


Рис. 22. Функция распределения локально-запертых электронов в верхней  $\langle f_1 \rangle_\chi$  и нижней  $\langle f_2 \rangle_\chi$  половинках тора (дрейф направлен вверх). Пунктир — функция распределения банановых частиц  $f^b$  для  $x = 11$  см,  $\rho = 18$  см,  $\theta = 90^\circ$

ленным расчетом для условий Т-10, проведенным Ю. Н. Днестровским и А. П. Смирновым на основе кинетического уравнения (2.112) (рис. 20—22). Качественно эти результаты подобны тем, которые были получены для ионов (см. § 3.3).

### 3.5. Адиабатический захват и вынос частиц

До сих пор мы рассматривали конвективный перенос в гофрах в тех случаях, когда в левой части уравнения (2.91) можно было пренебречь последним слагаемым и использовать аналитическое решение (2.113)—(2.116). Это справедливо либо тогда, когда гофрировка [точнее, параметр  $\Gamma \sim \sqrt{\Delta}/\beta$  (2.79)] не сильно изменяется вдоль дрейфовой траектории локально-запертых частиц, либо если  $\epsilon \ll \epsilon_{dr}$ . Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда  $\epsilon \gg \epsilon_{dr}$  (1.22) и параметры гофрировки существенно изменяются вдоль дрейфовой траектории частиц. В этом случае в левой части уравнения (2.91) следует сохранить последнее слагаемое. Вместе с тем слагаемым, описывающим соударения быстрых частиц с основной массой тепловых электронов и ионов, в первом приближении можно пренебречь. В стационарном случае и в отсутствие объемных источников и стоков частиц при этом получим из (2.91)

$$\frac{\partial f^L}{\partial L} = \chi \frac{\partial f^L}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial L} (\ln \Gamma). \quad (3.67)$$

Функция распределения локально-запертых частиц  $f^L$  остается



постоянной вдоль характеристик:

$$\chi\Gamma(L) = \text{const.} \quad (3.68)$$

Уравнение (3.68) выражает постоянство (в бесстолкновительном случае) адиабатического инварианта продольного движения локально-запертых частиц вдоль силовой линии  $\mathbf{B}$  (1.21), этот инвариант с точностью до постоянного множителя равен величине  $\chi\Gamma$  (2.68), (2.77).

Примеры различных зависимостей эффективного «объема» локальной потенциальной ямы гофра  $I_{\max} \sim \Gamma$  от координаты  $L$  были даны на рис. 4 в § 1.6. Там же приведены характеристики уравнения (3.67). Если бы отсутствовало изменение магнитной индукции вдоль силовой линии  $\mathbf{B}$ , связанное с ее винтовым кручением, то распределение параметра гофрировки  $\Gamma$  вдоль дрейфовых траекторий всегда имело бы нормальный вид (см. рис. 4, *a*), отвечающий уменьшению глубины магнитной ямы от катушек внутрь разрядной камеры токамака. Реально, однако, как было показано на примере T-10 (см. рис. 2, *b*), для ряда траекторий имеются участки аномального хода (см. рис. 4, *b*, *в*, *г*) и даже полного исчезновения потенциальных ям (см. рис. 4, *г*).

Из рис. 4 видно, что на участках аномального хода, когда глубина гофрировки уменьшается от центра к периферии, вначале может происходить адиабатический захват банановых частиц в гофр (см. § 1.6). В то же время на завершающем этапе данного участка траектории происходит, наоборот, адиабатический выход локально-запертых частиц из гофра в группу банановых частиц. Банановые частицы, захваченные в гофр из данной магнитной поверхности, высвобождаются из него в зеркально-симметричной точке на той же самой магнитной поверхности. В нулевом приближении, когда соударения считаются полностью отсутствующими (3.67), уход частиц из-за захвата в гофр полностью компенсируется их высвобождением в зеркально-симметричной точке [эти точки связаны одной характеристикой (3.68)]. Образуется как бы конвективная ячейка. Перенос частиц хотя и существует, однако в этом приближении никакого изменения функции распределения в стационарном случае не происходит. Но если учесть соударения частиц как малую добавку, то произойдет раскомпенсация захватившихся и выходящих частиц. Данный перенос подробно исследован П. Н. Юшмановым [9, 53, 54]; соответствующие формулы имеют диффузионный вид. Сильных искажений функций распределения в конвективных ячейках не происходит, поэтому не будем на них останавливаться, отсылая читателя к обзору [9].

Принципиально иной характер носит конвекция в участках нормального хода, в которых глубина гофрировки увеличивается от центра к краю разряда. Действительно, из рис. 4, *в*, *г* видно, что в отсутствие соударений на начальном участке траектории от периферии к центру в гофр могут попадать только частицы, приходящие в плазму извне. Если таких частиц нет, то функция распределения локально-запертых частиц на этом участке равна нулю

(за исключением узкого пограничного слоя вблизи сепаратрисы, где происходит переход к конечной функции распределения банановых частиц  $f$  и необходимо учитывать слагаемое, пропорциональное  $\frac{\partial}{\partial \chi} \left( \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} \right)$  (2.91)). Совершенно иная картина на тех участках, где глубина гофрировки (точнее, величина  $\Gamma$ ) увеличивается в направлении дрейфа локально-запертых частиц. Здесь происходит адиабатический захват в гофр банановых частиц, которые далее уже нигде не покидают гофр вплоть до выхода из плазменного шнура [4] (см. также [47]). На этих участках может возникать сильный вынос частиц из плазмы, приводящий к заметному опустошению фракции быстрых частиц, подчиняющихся условию  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_{dr}$ . Участки заметного вырастания глубины гофрировки вдоль дрейфовых траекторий расположены обычно у края разряда на дальней периферии. Влияние адиабатического захвата здесь прямо противоположно эффектам, приводящим к обогащению на периферии фракции быстрых частиц.

Оценим теперь влияние данного эффекта на кинетику частиц в плазме. Ограничимся, как обычно, случаем тонкого токамака в отсутствие внутренних электрических полей разделения зарядов. Согласно граничному условию (2.81) имеем из уравнения (3.67)

$$f^L(\chi, L) = f(L_0(\chi, L)), \quad (3.69)$$

где начальное значение координаты  $L_0(\chi, L)$  определяется из уравнения характеристик (3.68) при  $\chi_0 = 1$ . Согласно (2.89) или (2.96) отсюда нетрудно получить

$$\frac{\partial I^{*L}}{\partial \rho} \approx \frac{\pi R_0}{\sqrt{2} \omega_{B\alpha}} \frac{\mathcal{E}^{*/s}}{m_\alpha^{*/s}} f \frac{\partial}{\partial \rho} \Gamma, \quad (3.70)$$

где производная по  $\rho$  должна браться при постоянном значении  $x = \rho \cos \theta = R_0(s-1)$ . Выражение (3.70) можно также получить из (2.92) или (2.106), если при условии (1.22) пренебречь первым слагаемым в правой части. Таким образом, уравнение (2.85) или (2.96) становится локальным на данной магнитной поверхности. Из (2.96), (3.70) видно, что наличие адиабатического захвата, приводящего к нескомпенсированному уходу частиц из плазмы, эквивалентно следующей простой замене:

$$\partial f / \partial t \rightarrow \partial f / \partial t + v_{ad} f, \quad (3.71)$$

где

$$v_{ad}(\mathcal{E}, s, \rho) = \frac{\mathcal{E}}{4\pi m_\alpha \omega_{B\alpha} J_{1\rho}^*} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta} \right). \quad (3.72)$$

— эффективная частота потерь частиц с данными  $\mathcal{E}, s$  на данной магнитной поверхности  $\rho$ . Зависимость  $v_{ad}$  от величины  $s$ , кроме  $J_{1\rho}^*$ , связана также с зависимостью глубины гофрировки от координаты  $x = R_0(s-1)$ . Частоту потерь можно грубо оценить как

[см. (1.23)]

$$v_{ad} \sim \frac{v_{dr}(\mathcal{E})}{50 \sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta} \right), \quad (3.73)$$

где  $\varepsilon = \rho/R_0$ ;  $v_{dr}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}c/(Z_\alpha e B R_0)$  — скорость дрейфа локально-запертых частиц с зарядом  $Z_\alpha e$  и энергией  $\mathcal{E}$ .

Из (3.73) видно, что адиабатический захват наиболее эффективен вблизи края плазмы, где максимальна величина  $\frac{\partial}{\partial \rho} (\sqrt{\Delta}/\beta)$ .

Вблизи центра плазменного шнура обычно возникает конвективная ячейка, перенос в которой носит диффузионный характер.

Пусть  $L_\delta$  — характерный поперечный масштаб изменения глубины гофрировки:

$$L_\delta = \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta} \right) \right]^{-1} \ll a. \quad (3.73a)$$

С уменьшением энергии, когда

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &\ll \mathcal{E}_{ad}, \quad \frac{d\rho}{dL} < L_\delta; \\ \mathcal{E}_{ad} &= \frac{e^2}{2} \left[ \frac{8\pi Z Z_\alpha R_0 B n \ln(\Delta L_\delta)}{c \sqrt{m_\alpha}} \right]^{1/2}, \sim \mathcal{E}_{dr}(L_\delta), \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

эффективность рассматриваемого процесса ослабевает, формулы (3.67) — (3.73) при этом теряют применимость. Согласно оценке (3.73)

$$v_{ad}(\mathcal{E}) \sim \frac{v_\alpha(\mathcal{E})}{50 \sqrt{\varepsilon \Delta}} \frac{l_{dr}(\mathcal{E})}{L_\delta}, \quad (3.75)$$

где  $l_{dr}(\mathcal{E})$  — длина свободного дрейфового пробега в гофре (1.12). При условии

$$l_{dr}(\mathcal{E}) > 50 \sqrt{\varepsilon \Delta} L_\delta \quad (3.76)$$

эффективная частота потерь  $v_{ad}$  превышает эффективную частоту кулоновских соударений  $v_\alpha$ . В этом случае при  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_{ad}$  функция распределения может оказаться существенно меньше равновесной максвелловской функции.

Оценим эту функцию распределения для данной магнитной поверхности. Для простоты будем полагать, что  $v_{ad}$  обращается в нуль при  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_{ad}$ . В грубом приближении также пренебрежем питч-угловой столкновительной релаксацией функции распределения. В этом случае кинетическое уравнение (2.96) с учетом (3.71) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} f'_{\xi\xi} + f'_\xi - \lambda H(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{dr}) \xi^{1/2} f &= 0; \\ \xi = \frac{\mathcal{E}}{T_\alpha}; \quad \lambda = \sqrt{2} \frac{v_{ad}(\mathcal{E})}{v_{T\alpha}} \frac{T_\alpha}{\mathcal{E}} \sim \left( \frac{T_\alpha}{\mathcal{E}_{ad}} \right)^{1/2}, \frac{1}{30 \sqrt{\varepsilon \Delta}} \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

Используя при  $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{ad} \gg T_\alpha$  ВКБ-приближение, получаем для безразмерной функции распределения, нормированной на единицу при  $\mathcal{E} = 0$ , выражение

$$f = \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{T_\alpha}\right) - \frac{Q_0^* - 1}{Q_0^* + 1} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{ad}}{T_\alpha}\right), \quad \mathcal{E} < \mathcal{E}_{ad}; \quad (3.78a)$$

$$f = \left(\frac{Q_0^*}{Q^*}\right)^{1/2} \frac{2}{1 + Q_0^*} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_{ad}}{T_\alpha} + \int_{\mathcal{E}_{ad}}^{\mathcal{E}} Q^* \frac{d\mathcal{E}}{T_\alpha}\right)\right], \quad \mathcal{E} > \mathcal{E}_{ad}. \quad (3.78b)$$

Здесь

$$Q_0^* = Q^*(\mathcal{E}_{ad}); \quad Q^*(\mathcal{E}) = \left[1 + 4\lambda \left(\frac{\mathcal{E}}{T_\alpha}\right)^{1/2}\right]^{1/2} \sim \left[1 + \frac{0,1}{\sqrt{\varepsilon\Delta}} \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{ad}}\right)^{1/2}\right]^{1/2}. \quad (3.79)$$

Из (3.78) видно, что данный механизм потерь действительно может приводить к заметному опустошению функции распределения в области энергий  $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{ad}$ .

Используя полученные выражения, можно также оценить потоки частиц и тепла, проходящие через данную магнитную поверхность. Соответствующие потоки  $\Gamma_{ad}^n$ ,  $\Gamma_{ad}^w$  по порядку составляют

$$\Gamma_{ad}^n \sim \frac{cT_\alpha}{Z_\alpha eB} \frac{n\sqrt{\Delta}}{R_0} \left(\frac{\mathcal{E}_{ad}}{T_\alpha}\right)^{1/2} \frac{\exp(-\mathcal{E}_{ad}/T_\alpha)}{(1 + Q_0^*)^2}; \quad (3.80)$$

$$\Gamma_{ad}^w \sim \frac{\mathcal{E}_{ad}}{T_\alpha} \Gamma_{ad}^n. \quad (3.81)$$

Заметим, что все величины для электронов и ионов оказываются близкими, различие связано в основном с разницей в значении  $\mathcal{E}_{ad}$ .

Разумеется, проведенное в настоящем параграфе исследование можно рассматривать только как качественное. Для получения детальных количественных результатов следует численно решать полную систему кинетических уравнений ККП (см. § 2.9, 2.10).

### 3.6. Конвективный перенос частиц и энергии в токамаке

До сих пор мы интересовались только искажениями функций распределения быстрых частиц плазмы из-за кинетической конвекции в гофрах. Обратимся теперь к вопросу об эффективности данного процесса с точки зрения глобального переноса в токамаке частиц и энергии. Надтепловые частицы составляют обычно малую долю полного числа частиц в квазиравновесной плазме токамака. Однако энергетическая зависимость потоков ККП такова, что их вклад в общий перенос частиц и энергии может оказаться существенным и в ряде случаев даже преобладающим. В особенности это

относится к переносу энергии ионами плазмы, поскольку именно для этих частиц характерная энергия дрейфового переноса  $\mathcal{E}_{dr}$  (1.16) может вплотную приближаться к тепловой области энергий (см. гл. 1).

**Общие уравнения.** Для получения количественных характеристик эффективности кинетического конвективного переноса необходимо включить быстрые частицы в общие гидродинамические уравнения баланса частиц и энергии в токамаке. Опишем соответствующую процедуру.

Цепочка гидродинамических уравнений переноса для моментов (концентраций, средних массовых скоростей, температур и т. д.) может быть обрвана на конечном их числе, если функции распределения частиц близки к максвелловским [27, 41]. В условиях, близких к равновесным, это справедливо для тепловых частиц, которые составляют основную часть всей плазмы. Поэтому понятия моментов следует относить именно к тепловой или фоновой плазме. Эта фракция частиц, однако, незамкнута, поскольку из-за наличия дрейфа в гофрах, кулоновских соударений и ускоряющих электрических полей она находится в состоянии непрерывного обмена частицами, импульсом, энергией с фракцией надтепловых частиц. Последняя же в условиях ККП и других кинетических процессов может быть весьма далека от состояния термодинамического равновесия. Поэтому общее описание плазмы следует проводить на основе совместного решения системы уравнений гидродинамики для тепловой плазмы и уравнений ККП для надтепловых частиц. При этом влияние фоновой плазмы на надтепловые частицы учитывается граничными условиями в системе ККП при низких энергиях частиц  $\mathcal{E}$ : переход в максвелловские функции с заданными значениями  $n_\alpha$ ,  $T_\alpha$  при  $\mathcal{E} \ll T_\alpha$  (см. § 2.7). Влияние же быстрых частиц на фоновую плазму определяется соответствующими потоками частиц и энергии, обусловленными кинетическим конвективным переносом.

Воспользовавшись законами сохранения, представим уравнения переноса фоновой плазмы для простейшей транспортной модели [7, с. 223] с учетом влияния надтепловых частиц в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \Gamma_{ne, i}) = P - S_n^f; \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (nT_e) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \left( q_e + \frac{3}{2} T_e \Gamma_{ne} \right) \right] + \frac{n\Gamma_e}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\Gamma_{ne}}{n} \right) = \\ & = Q_{OH} + Q_e - Q_{ei} - S_{We}^f - \frac{3}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho T_e \Gamma_{ne}^f) - \frac{n\Gamma_e}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\Gamma_{ne}^f}{n} \right); \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (nT_i) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \left( q_i + \frac{3}{2} T_i \Gamma_{ni} \right) \right] + \frac{n\Gamma_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\Gamma_{ni}}{n} \right) = \\ & = Q_i + Q_{ei} - S_{Wi}^f - \frac{3}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho T_i \Gamma_{ni}^f) - \frac{n\Gamma_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\Gamma_{ni}^f}{n} \right); \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\Gamma_n^i = \frac{1}{\rho R_0} \int_{\mathcal{E}'}^{\infty} I_\rho^* d\mathcal{E} ds, \quad S_n^i = \frac{1}{\rho R_0} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{E}'}^{\infty} I_i^* d\mathcal{E} ds + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho R_0 \Gamma_n^i) - \int_{\mathcal{E}'}^{\infty} I_Q^* d\mathcal{E} ds \right]; \quad (3.85)$$

$$\Gamma_W^i = \frac{1}{\rho R_0} \int_{\mathcal{E}'}^{\infty} \mathcal{E} I_\rho^* d\mathcal{E} ds, \quad S_W^i = \frac{1}{\rho R_0} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{E}'}^{\infty} \mathcal{E} I_i^* d\mathcal{E} ds + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho R_0 \Gamma_W^i) - \int_{\mathcal{E}'}^{\infty} \mathcal{E} I_Q^* d\mathcal{E} ds \right]. \quad (3.86)$$

Здесь концентрации  $n$ , температуры  $T_{e,i}$ , потоки частиц  $\Gamma_{ne,i}$ , тепла  $q_{e,i}$ , источники (стоки) частиц и энергии  $P, Q_{OH}, Q_e, Q_i$  относятся к тепловым частицам [7], а интегральные члены  $\Gamma_{n,w}^i, S_{n,w}^i$  (3.85), (3.86) — к быстрым (для простоты здесь рассматривается токамак с большим аспектным отношением и поперечным сечением магнитных поверхностей в форме концентрических окружностей, см. § 2.10, 2.11). Выражения для потоков  $I_i^*, I_\rho^*, I_Q^*$  определены согласно (2.96)–(2.98) или (2.113). Все величины усреднены по магнитной поверхности  $\rho = \text{const}$ . Интегрирование по  $s$  в (3.85), (3.86) ведется в интервале разрешенного движения частиц (2.100), (2.101)  $0 \leq s \leq 1 + \varepsilon$ , после чего производится суммирование по двум противоположным направлениям движения вдоль  $\mathbf{V}$ . Относительно интегрирования по энергии заметим следующее. Система уравнений (3.82)–(3.84) может быть строго получена при условии  $\mathcal{E}_{dr} \gg T_\alpha$ , когда конвективный перенос в гофрах целиком сконцентрирован в области надтепловых частиц. При этом имеется промежуточная область энергий

$$T_\alpha < \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_0 \leq \mathcal{E}_{dr}, \quad (3.87)$$

в которой, с одной стороны, справедливо линеаризованное кинетическое уравнение (2.96), а с другой стороны, функция распределения близка к локальной максвелловской функции (2.4) на данной магнитной поверхности. При этом с точностью до экспоненциально малых слагаемых величины  $\Gamma_{n,w}^i, S_{n,w}^i$  (3.85), (3.86) не зависят от нижнего предела интегрирования  $\mathcal{E}'$ , если он лежит в интервале (3.87)\*.

\* Здесь считается, что источник  $I_Q^*$  (2.97) равен нулю в интервале (3.87), и, кроме того, пренебрегается низкоэнергетическим диффузионным пределом (см. § 1.3, 3.2) величины  $I_\rho^*$  (последний, в принципе, можно включить в потоки  $\Gamma_n, q$ ).

Величины  $S_n^f$ ,  $S_w^f$  согласно линеаризованному кинетическому уравнению (2.96) можно представить в виде

$$S_n^f = \frac{1}{\rho R_0} \int I_{\mathcal{G}}^* ds \Big|_{\mathcal{G}=\mathcal{G}'}; \quad (3.88)$$

$$S_w^f = \frac{1}{\rho R_0} \int_{\mathcal{G}'}^{\infty} I_{\mathcal{G}}^* d\mathcal{G} ds. \quad (3.89)$$

Представление (3.88), (3.89) менее наглядно, чем (3.85), (3.86), однако в конкретных расчетах оно может оказаться удобнее. Величина  $S_n^f$  описывает поток быстрых частиц в пространстве скоростей (аналогичный потоку убегающих электронов [19—24]), который учитывает обмен надтепловых частиц с фоновой плазмой. Величина  $S_w^f$  описывает обмен энергией между быстрыми и тепловыми частицами из-за кулоновского взаимодействия.

Величины  $\Gamma_{n,w}^f$ ,  $S_{n,w}^f$  являются дополнительными источниками для макроскопических уравнений переноса (3.82)—(3.84) [7]. Их следует определять из решения уравнений ККП, в которые величины  $n$ ,  $T_{e,i}$  входят как параметры. Таким образом, получаем замкнутую систему уравнений для концентраций и температур, которая учитывает конвективный перенос быстрых частиц.

Заметим, что уравнения (3.82)—(3.84) справедливы только, если основной вклад в изменение энергии быстрых частиц сорта  $\alpha$  вносят их соударения с тепловыми частицами того же сорта  $\alpha$ . Это справедливо для электронов плазмы, а также для ионов при выполнении условия (2.17). Обобщение на произвольный случай не составляет труда. Отметим также, что если совокупность всех быстрых частиц обладает энергией, сравнимой с тепловой, то в линеаризованном интеграле кулоновских соударений изменяются слагаемые диффузионного типа, пропорциональные  $T_\alpha$  (2.5), (2.11), (2.12). Это слагаемое, однако, часто оказывается несущественным, так что линеаризованное кинетическое уравнение ККП можно применять и в этом случае.

**Результаты численных расчетов.** Для оценки эффективности ККП по сравнению с другими видами переноса воспользуемся численным расчетом для ионов в токамаке Т-10 [12]. Определим потоки через магнитную поверхность радиусом  $\rho$  [см. (3.85), (3.86)]:

$$\rho \Gamma_n^f = \frac{1}{R_0} \int I_\rho^* d\mathcal{G} ds; \quad (3.90)$$

$$\rho \Gamma_w^f = \frac{1}{R_0} \int \mathcal{G} I_\rho^* d\mathcal{G} ds \quad (3.91)$$

(источники частиц  $I_0^*$  считаем отсутствующими). Численные расчеты для условий Т-10, описанные в § 3.3, приводят к распределению потоков  $\rho \Gamma_n^f$  и  $\rho \Gamma_w^f$  по сечению токамака, показанному на

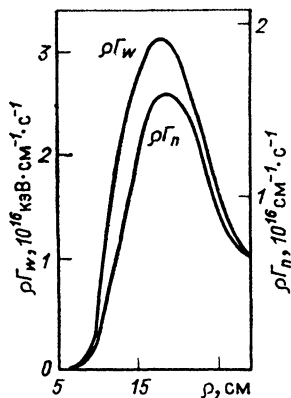


Рис. 23. Поток энергии  $\rho\Gamma_W$  (3.90) (шкала слева) и поток частиц  $\rho\Gamma_n$  (3.91) (шкала справа) для T-10 при  $n(0) = 4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ ,  $T_i(0) = 0,6 \text{ кэВ}$  (результаты численного расчета)

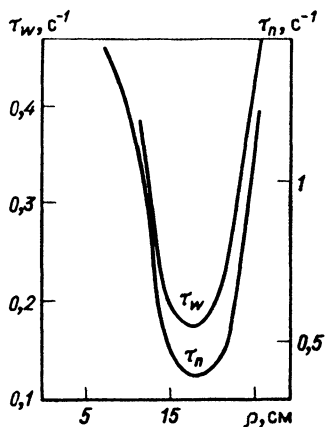


Рис. 24. Распределение эффективных времен удержания частиц  $\tau_n$  (3.92) (шкала справа) и энергии  $\tau_W$  (3.93) (шкала слева) в тех же условиях, что на рис. 23

рис. 23. Видно, что в области  $\rho > 5 \text{ см}$ , где нет гофров, потоки отсутствуют. С увеличением  $\rho$  они очень быстро нарастают и достигают максимума при  $\rho = 18 \text{ см}$ , а затем спадают к краю плазменного шнура  $\rho = 29 \text{ см}$ . Общий ход потоков  $\rho\Gamma_n$  и  $\rho\Gamma_W$  подобен.

Можно ввести характерное время жизни частиц в объеме внутри заданной магнитной поверхности  $\rho = \text{const}$ , определяемое процессом ККП:

$$\tau_n = \int_0^{\rho} n \tilde{\rho} \tilde{d\rho} / (\rho \Gamma_n^i). \quad (3.92)$$

Аналогично вводится время удержания энергии:

$$\tau_W = \int_0^{\rho} g n \tilde{\rho} \tilde{d\rho} / (\rho \Gamma_W^i). \quad (3.93)$$

Распределение по радиусу в токамаке T-10 времен удержания  $\tau_n$  и  $\tau_W$  представлено на рис. 24. Видно, что распределения времен удержания частиц плазмы и энергии также подобны. Они минимальны при  $\rho \approx 18 \text{ см}$ , т. е. там, где конвективный перенос наиболее силен.

Важно сопоставить конвективный перенос с неоклассическим. Для сопоставления удобно ввести эффективные коэффициенты теплопроводности  $\kappa_{\text{con}}$  и диффузии  $D_{\text{con}}$  за счет конвективного пе-



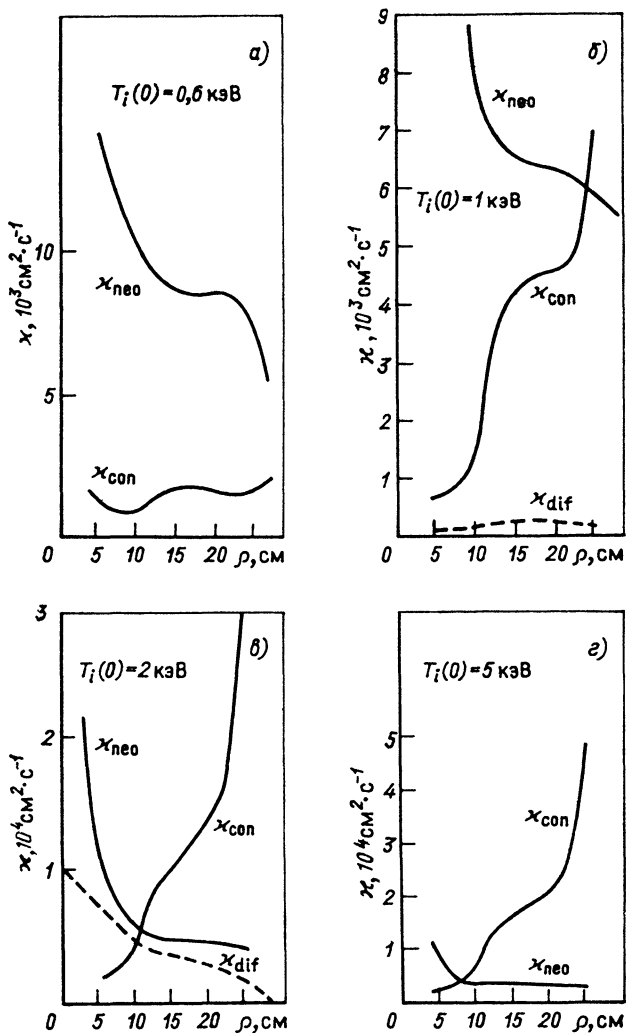


Рис. 25. Распределение по малому радиусу  $\rho$  эффективных коэффициентов неонной теплопроводности для конвективного переноса  $\chi_{\text{con}}$  (3.94) и неоклассического переноса  $\chi_{\text{neo}}$  для T-10 при  $n(0) = 4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $B_0 = 1,5 \text{ Тл}$  и различных значениях температуры ионов в центре плазменного разряда  $T_i(0)$  [ $\chi_{\text{dif}}$  — коэффициент теплопроводности для диффузионного переноса в гофрах (см. § 3.2)]

реноса:

$$\chi_{\text{con}} = -\frac{\Gamma_{w\rho}^f}{n(\partial T/\partial \rho)}; \quad D_{\text{con}} = -\frac{\Gamma_n^f}{\partial n/\partial \rho}. \quad (3.94)$$

В токамаке T-10 конвективный перенос сравним с неоклассическим при  $T_i(0) = 1 \text{ кэВ}$  (рис. 25, а—г). Для сравнения прово-

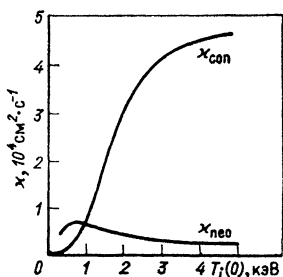


Рис. 26. Зависимость эффективного коэффициента ионной теплопроводности для конвективного  $\chi_{\text{con}}$  и неоклассического  $\chi_{\text{neo}}$  переносов от ионной температуры в центре разряда  $T_i(0)$  для  $\rho = 25$  см,  $B_0 = 1,5$  Тл,  $n(0) = 4 \cdot 10^{13}$  см $^{-3}$

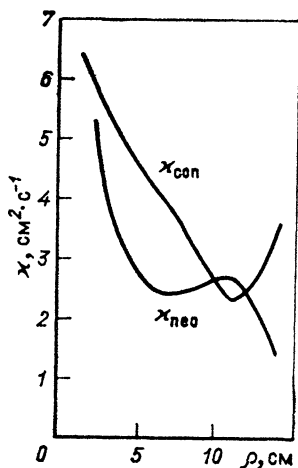


Рис. 27. Распределение эффективных коэффициентов ионной теплопроводности для конвективного переноса в гофрах  $\chi_{\text{con}}$  и неоклассического переноса  $\chi_{\text{neo}}$  в Т-4

дили расчет теплопроводности ионов в гофрах в диффузионном приближении [5, 6, 11]. Сопоставление показало, что диффузионное приближение несправедливо в условиях токамака Т-10 уже при минимальных рассматривавшихся температурах ионов  $T_i(0) = 0,2$  кэВ. Оно приводит не только к другим значениям, но и дает существенно иной ход коэффициента теплопроводности по сечению токамака в сравнении с эффективным коэффициентом конвективной теплопроводности.

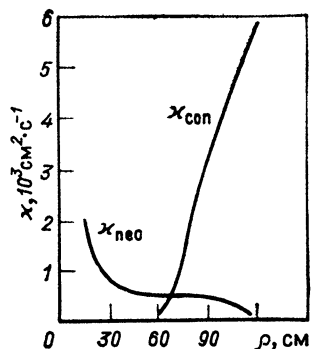
На рис. 26 представлена общая картина изменения ионной теплопроводности в зависимости от температуры ионов в центре разряда (по данным расчета для токамака Т-10). Видно, что вклад конвективного переноса в конце области плато и банановой области ( $T_i(0) > 1$  кэВ) является определяющим. Следует, однако, подчеркнуть, что влияние радиального электрического поля на движение ионов, не учтенное в настоящем расчете, может при высоких значениях  $T_i$  привести к некоторому изменению результатов.

В токамаке Т-4 конвективная теплопроводность сравнима с неоклассической уже при температуре  $T_i(0) \approx 0,5$  кэВ (рис. 27). Причина усиления роли конвекции по сравнению с Т-10 состоит в том, что в Т-4 больше глубина гофров [8] (см. рис. 2, а) и меньше поперечный размер токамака.

Как показывают расчеты, при высоких значениях  $T_i$  конвекция в гофрах обеспечивает весьма эффективный вынос энергии ионов к границам разряда. Всю область плазменного шнура можно, с этой точки зрения, условно разделить на внутреннюю, где гофры, обеспечивающие конвекцию к стенкам, практически отсут-

Рис. 28. Распределение эффективных коэффициентов ионной теплопроводности для конвективного переноса в гофрах  $\chi_{\text{con}}$  и неоклассического переноса  $\chi_{\text{neo}}$  для токамака INTOR (первоначальный вариант [55]):

$0,003 < \Delta < 0,012$  при  $60 \text{ см}$ ,  $< x < a = 120 \text{ см}$ .  
 $R_0 = 530 \text{ см}$ ,  $T_i(0) = 15 \text{ кэВ}$ ,  $n(0) = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  
 $B_0 = 5,5 \text{ Тл}$



ствуют, и наружную, где они существенны. Во внутренней зоне теплоперенос обеспечивается в основном неоклассикой и МГД-перемешиванием вследствие дисруптивной неустойчивости, во внешней — конвекцией в гофрах. Перенос в гофрах при достаточно высокой температуре  $T_i$  весьма велик, так что условия во внешней зоне должны сильно отличаться от условий во внутренней зоне. В токамаке Т-10, например, размер внутренней зоны составляет менее трети радиуса шнура ( $\rho \lesssim 5 \text{ см}$ ), в токамаке Т-4 внутренней зоны вообще нет.

В токамаках, где гофры отсутствуют в большей части разряда (PLT, JET, TFTR и др.), влияние переноса в гофрах резко ослабевает. Во внутренней зоне, где гофры присутствуют только в узком горизонтальном слое, проходящем через центр шнура, имеется лишь слабое перемешивание между соседними магнитными поверхностями, носящее диффузионный характер [9]. Конвективный перенос существует только вблизи края разряда на наружной стороне тора. По-видимому, это и дает возможность достигнуть в центральных областях этих токамаков рекордных ионных температур.

Изменяя искусственно глубину гофров и размеры внутренней области, можно управлять температурным режимом разряда. Для примера на рис. 28 представлены результаты расчета ионного теплопереноса для условий реактора INTOR. Характер распределения гофров принимался при этом согласно предварительному варианту проекта [55] (в следующем варианте проекта INTOR [56], в стадии нагрева и зажигания разряда, внутренняя зона, свободная от гофров, занимает гораздо большую часть объема плазменного шнура). Видно, что роль кинетического конвективного переноса в областях, где имеются гофры, в этом случае определяющая.

Итак, проведенное рассмотрение показывает, что кинетический конвективный перенос ионов в локальных гофрах магнитного поля токамака приводит к существенной модификации их функции распределения и к заметному макроскопическому переносу частиц и энергии. Роль конвективного переноса энергии особенно возрастает с приближением к термоядерным температурам, когда этот процесс может стать определяющим. Вследствие этого представ-

ляется вполне реалистическим сделанное в [17] предложение использовать искусственное изменение гофрировки для управления температурным режимом и режимом зажигания термоядерного реактора. Разработанный здесь метод расчета позволяет моделировать этот процесс.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### П1. КОНСЕРВАТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Кинетическое уравнение с источниками или стоками частиц и с оператором соударений Ландау обладает консервативной (дивергентной) формой

$$\partial I_i / \partial x_i = I_Q. \quad (\text{П1.1})$$

Здесь  $x_i$  — независимые переменные в фазовом пространстве, в их число включено и время  $t$ , по повторяющимся индексам производится суммирование. Такую форму удобно сохранять при любых заменах переменных:

$$y_k = y_k(x_i). \quad (\text{П1.2})$$

Достигается это следующим образом. Уравнение (П1.1) в новых переменных (П1.2) сохраняет дивергентную форму

$$\partial \tilde{I}_k / \partial y_k = \tilde{I}_Q, \quad (\text{П1.3})$$

если плотности вектора потока  $\tilde{I}_k$  и источника частиц  $\tilde{I}_Q$  связаны с соответствующими величинами  $I_i$ ,  $I_Q$  (П1.1) соотношениями

$$\tilde{I}_k = \frac{D(x)}{D(y)} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} I_i, \quad (\text{П1.4})$$

$$\tilde{I}_Q = \frac{D(x)}{D(y)} I_Q, \quad (\text{П1.5})$$

где

$$\frac{D(x)}{D(y)} = \frac{\partial(x_1 \dots x_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)} = \left[ \frac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} \right]^{-1} \quad (\text{П1.6})$$

— якобиан преобразования от переменных  $x_i$  к переменным  $y_k$  (П1.2) (в частном случае канонических преобразований  $D(x)/D(y) \equiv 1$  [26]. Соотношения (П1.4), (П1.5) легко получить, если рассматривать (П1.1) как уравнение непрерывности, формально представляя отношение потока  $I_i$  к плотности  $I_i$  как «скорость»  $dx_i/dt$ :

$$I_i = I_i dx_i/dt \quad (\text{П1.7})$$

и учитывая то, что при переходе к новым переменным (П1.2) очевидным образом трансформируются «скорости»

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (\text{П1.8})$$

и изменяется фазовый объем

$$dx_1 \dots dx_n = \frac{D(x)}{D(y)} dy_1 \dots dy_n. \quad (\text{П1.9})$$

Доказательство (П1.3) при преобразованиях (П1.4), (П1.5) в общем случае следует из тождества

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{D(x)}{D(y)} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (\text{П1.10})$$

которое устанавливается из общих свойств якобианов.

Рассмотрим теперь поверхность в  $n$ -мерном фазовом пространстве переменных  $x_i$

$$F(x_i) = 0, \quad (\text{П1.11})$$

где  $F$  — однозначная функция переменных  $x_i$ , обладающая нужной степенью гладкости. Пусть в пространстве переменных  $y_k$  (П1.2) та же самая поверхность задается равенством

$$G(y_k) = 0. \quad (\text{П1.12})$$

Поскольку оба равенства (П1.11) и (П1.12) задают одну и ту же поверхность, то векторы нормали к ней в данной точке совпадают, т. е. при  $(\partial F/\partial x_i \neq 0, (\partial G/\partial y_k) \neq 0)$  имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\delta F}{\delta G} \frac{\partial G}{\partial x_i} &\equiv \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial y_m} \frac{\delta F}{\delta G}; \\ \frac{\partial G}{\partial y_k} = \frac{\delta G}{\delta F} \frac{\partial F}{\partial y_k} &\equiv \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \frac{\partial F}{\partial x_s} \frac{\delta G}{\delta F}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.13})$$

где коэффициент пропорциональности  $(\delta F/\delta G) = (\delta G/\delta F)^{-1}$  не зависит от того, по какой из переменных  $x_i$  (или  $y_k$ ) производится дифференцирование.

Поток вектора  $I_i$  (П1.1) через единицу поверхности (П1.11) в данной точке  $x_i$  пропорционален величине

$$R = I_i \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (\text{П1.14})$$

Аналогичный поток вектора  $\tilde{I}_k$  (П1.13) в той же точке пропорционален величине

$$\tilde{R} = \tilde{I}_k \frac{\partial G}{\partial y_k}. \quad (\text{П1.15})$$

Свяжем величины  $R$  и  $\bar{R}$ . Учитывая (П1.4) и (П1.13), получаем

$$\bar{R} = \frac{D(x)}{D(y)} \frac{\delta G}{\delta F} R. \quad (\text{П1.16})$$

Соотношения (П1.4), (П1.5) и (П1.16), связывающие потоки для двух различных наборов переменных, будем называть *консервативными преобразованиями*.

## П2. УСРЕДНЕНИЕ ПО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Используемый в настоящей статье метод усреднения кинетического уравнения по периодической переменной аналогичен, по существу, предложенному в [35]. Опишем здесь этот метод в удобной для нашего рассмотрения форме.

Будем исходить из линейаризованного кинетического уравнения в консервативной форме, в котором выделена одна из переменных ( $\zeta$ ):

$$\frac{\partial I_i}{\partial x_i} + \frac{\partial I_{\zeta}}{\partial \zeta} = I_Q; \quad I_i = \hat{I}_i \{f\}; \quad I_{\zeta} = \hat{I}_{\zeta} \{f\}. \quad (\text{П2.1})$$

Здесь  $\hat{I}_{i,\zeta}$  — линейные дифференциальные операторы, действующие на функцию распределения  $f$ . Если все величины в рассматриваемой системе являются периодическими функциями переменной  $\zeta$  с периодом  $\Delta\zeta$ , то такую переменную  $\zeta$  будем называть *периодической переменной*. Интегрируя (П2.1) по периоду  $\zeta$  и используя периодичность величин  $I_i$ ,  $I_{\zeta}$ ,  $I_Q$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int I_i d\zeta = \int I_Q d\zeta, \quad (\text{П2.2})$$

где обозначение  $\int$  означает интегрирование по периоду  $\zeta$  (результат, очевидно, не зависит от начального предела интегрирования). Уравнение (П2.2) является основным уравнением метода усреднения по периодической переменной. Предположим, что входящая в  $I_i$ ,  $I_{\zeta}$  функция распределения  $f(x_i, \zeta)$  может быть представлена в виде

$$f(x_i, \zeta) = f_0(x_i) + f_1(x_i, \zeta), \quad (\text{П2.3})$$

где зависящая от  $\zeta$  часть функции распределения  $f_1$  и ее производные по  $x_i$  малы по сравнению с величиной  $f_0$  и соответствующими ее производными:

$$|f_1| \ll f_0, \quad \left| \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right| \ll \left| \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \right|. \quad (\text{П2.4})$$

Условия справедливости такого предположения обсуждаются ниже. Подставляя в (П2.2) в выражение для плотностей потока  $I_i$  вместо функции распределения  $f$  ее усредненное значение  $f_0$ , получаем усредненное кинетическое уравнение в нулевом порядке тео-

рии возмущений:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_{\zeta}^{\Delta \zeta} \hat{I}_i \{f_0\} d\zeta \right) \approx \int_{\zeta}^{\Delta \zeta} I_Q d\zeta. \quad (\text{П2.5})$$

Интегрирование по  $\zeta$  в левой части (П2.5) распространяется только на коэффициенты линеаризованного оператора  $\hat{I}_i$ , которые в общем случае зависят от  $\zeta$ .

В ряде случаев, однако, уравнение в нулевом порядке теории возмущений (П2.5) не является хорошим приближением. Это происходит, когда какие-либо из коэффициентов в левой части (П2.5) после интегрирования по периоду  $\zeta$  обращаются в нуль (или становятся пренебрежимо малыми). Чтобы получить усредненное уравнение в следующем неисчезающем порядке теории возмущения, необходимо определить поправку  $f_1$  (П2.3) через  $f_0$  и учесть ее под знаком интеграла в левой части уравнения (П2.2).

Будем предполагать, что потоки  $I_i$ ,  $I_\zeta$  в (П2.1), которые включают в себя как бесстолкновительную часть, так и линеаризованный оператор соударений Ландау, имеют вид:

$$I_i = D \left( A_i + B_{im} \frac{\partial}{\partial x_m} \right) f; \quad (\text{П2.6})$$

$$I_\zeta = D v_\zeta f; \quad I_Q = D Q, \quad (\text{П2.7})$$

где  $D$  — якобиан преобразования от переменных  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  к переменным  $x_i$ ,  $\zeta$ ;

$$d\mathbf{r}d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} = D dx_i d\zeta, \quad (\text{П2.8})$$

а

$$v_\zeta = d\zeta/dt \quad (\text{П2.9})$$

есть бесстолкновительная скорость изменения со временем периодической переменной  $\zeta$ . Согласно теореме Лиувилля имеем

$$\frac{\partial C}{\partial \zeta} = - \frac{\partial}{\partial x_i} (D v_i); \quad C = D v_\zeta, \quad (\text{П2.10})$$

где

$$v_i = dx_i/dt \quad (\text{П2.11})$$

— аналогичные (П2.9) бесстолкновительные скорости изменения переменных  $x_i$ , включенные в коэффициенты  $A_i$  в (П2.6). В дальнейшем будем предполагать, что скорость изменения по  $\zeta$  — самая «большая» из характерных скоростей изменения функции распределения по переменным  $x_i$ ,  $\zeta$  (см. ниже). При этом, в частности, из (П2.10) следует, что величина  $C$  слабо зависит от переменной  $\zeta$ . Будем, однако, считать, что вместо (П2.10) имеют место строгие равенства

$$\frac{\partial C}{\partial \zeta} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (D v_i) = 0, \quad (\text{П2.12})$$

т. е. величина  $C = Dv_\zeta$  является функцией только переменных  $x_i$  и не зависит от  $\zeta$ :

$$C = C(x_i). \quad (\text{П2.13})$$

Этого можно добиться небольшим переопределением переменных  $x_i, \zeta$ . Отметим также, что в выражении для  $I_\zeta$  (П2.7) опущена столкновительная часть. Это оправдано во всех интересующих нас случаях (см. ниже); при необходимости результаты легко обобщаются и на более сложные случаи.

Введем обозначение

$$\langle \dots \rangle_\zeta = \frac{\int_{\Delta\zeta} D(\dots) d\zeta}{\int_{\Delta\zeta} D d\zeta} = \frac{\int_{\Delta\zeta} (\dots) d\zeta/v_\zeta}{\int_{\Delta\zeta} d\zeta/v_\zeta} \quad (\text{П2.14})$$

[здесь использована независимость величины  $C = Dv_\zeta$  от  $\zeta$  (П2.13)]. Заметим, что если формально положить  $v_\zeta = d\zeta/dt$ , то интегрирование по  $d\zeta/v_\zeta$  в (П2.14) формально выглядит как интегрирование по времени вдоль траектории невозмущенного бесстолкновительного движения частиц. В действительности это не так. В (П2.2) и всюду далее интегрирование проводится по переменной  $\zeta$  при фиксированных остальных переменных  $x_i$  (в том числе и при  $t = \text{const}$ ). Все величины при этом являются строго периодическими функциями  $\zeta$  с периодом  $\Delta\zeta$ . В этом состоит принципиальное отличие применяемого здесь метода усреднения функции распределения по периодической переменной от усреднения по времени квазипериодического движения частиц с параметрами, адиабатически медленно изменяющимися вдоль траектории их движения [57].

Любую периодическую функцию можно разбить на среднюю (не зависящую от  $\zeta$ ) и осциллирующую по  $\zeta$  части. Для коэффициентов  $A_i, B_{ik}, Q$  (П2.6), (П2.7) это удобно сделать следующим образом:

$$A_i = \langle A_i \rangle + \frac{1}{D} \frac{\partial a_i}{\partial \zeta}; \quad (\text{П2.15})$$

$$B_{ik} = \langle B_{ik} \rangle + \frac{1}{D} \frac{\partial b_{ik}}{\partial \zeta}; \quad (\text{П2.16})$$

$$Q = \langle Q \rangle + \frac{1}{D} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \zeta}, \quad (\text{П2.17})$$

где

$$\langle a_i \rangle = \langle b_{ik} \rangle = \langle \tilde{q} \rangle = 0. \quad (\text{П2.18})$$

Периодические функции  $a_i, b_{ik}, \tilde{q}$  при условии (П2.18) однозначно и просто определяются из (П2.15)—(П2.17). В нулевом порядке



теории возмущения имеем из (П2.2), (П2.3), (П2.13)—(П2.18)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \langle A_i \rangle f_0 + \langle B_{ik} \rangle \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \right) \int^{\Delta \zeta} D d\zeta \right] \approx \langle Q \rangle \int^{\Delta \zeta} D d\zeta; \quad (\text{П2.19})$$

$$f_1 \approx -\frac{1}{C} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_i + b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) f_0 - \tilde{q} \right]. \quad (\text{П2.20})$$

Уравнение (П2.19) совпадает с (П2.5), а из (П2.20) при условии (П2.18) следует, что

$$\langle f_1 \rangle = 0, \quad (\text{П2.21})$$

т. е.  $f_1$  является осциллирующей частью функции распределения  $f$ . Если теперь подставить выражение для  $f_1$  (П2.20) в основное уравнение (П2.2), то получим вместо (П2.19) кинетическое уравнение для  $f_0$  в следующем порядке теории возмущений:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (I_i^{(0)} + I_i^{(2)}) = \langle Q \rangle \int^{\Delta \zeta} D d\zeta; \quad (\text{П2.22})$$

$$I_i^{(0)} = \left( \langle A_i \rangle f_0 + \langle B_{ik} \rangle \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \right) \int^{\Delta \zeta} D d\zeta; \quad (\text{П2.23})$$

$$I_i^{(2)} = -\int^{\Delta \zeta} d\zeta \left( \frac{\partial a_i}{\partial \zeta} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \frac{1}{C} \times \\ \times \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_j + b_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} \right) f_0 - \tilde{q} \right] d\zeta. \quad (\text{П2.24})$$

Величины  $I_i^{(0)}$  представляют собой усредненные компоненты плотности потока в нулевом порядке теории возмущения, а  $I_i^{(2)}$  — соответствующие поправки второго порядка малости [члены первого порядка теории возмущения обращаются в нуль вследствие равенств (П2.18), (П2.21)]. Напомним, что  $f_0$  и  $C$  не зависят от  $\zeta$ , поэтому интегрирование в формуле (П2.24) не затрагивает эти величины.

Полученное уравнение для  $f_0$  (П2.22)—(П2.24) имеет вид дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка (при  $b_{ik} \neq 0$ ) или второго порядка (при  $b_{ik} \equiv 0$ ) по переменным  $x_i$ . На самом деле порядок уравнения в каждом из этих случаев как минимум на единицу меньше. Действительно, члены, содержащие старшие производные, имеют вид

$$\frac{1}{C} \left( \int^{\Delta \zeta} d\zeta \frac{\partial b_{ik}}{\partial \zeta} b_{jm} \right) \frac{\partial^4 f_0}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j \partial x_m} \quad (\text{П2.25})$$

при  $b_{ik} \neq 0$  или

$$\frac{1}{C} \left( \int^{\Delta \zeta} d\zeta \frac{\partial a_i}{\partial \zeta} a_j \right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{П2.26})$$

при  $b_{ik} \equiv 0$ .

В каждом из этих выражений можно менять местами индексы  $i$  и  $j$ ,  $k$  и  $m$ , результат от этого не изменится. Если сложить выражения с одновременно переставленными индексами  $i \rightarrow j$ ,  $k \rightarrow m$ , то перед симметричными старшими производными будут стоять коэффициенты вида

$$\frac{1}{C} \int^{\Delta \zeta} d\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (b_{ik} b_{jm}) \text{ или } \frac{1}{C} \int^{\Delta \zeta} d\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_i a_j).$$

Поскольку любые величины являются периодическими функциями  $\zeta$ , то соответствующие интегралы обратятся в нуль, и, таким образом, члены со старшими производными в уравнении (П2.22) исчезнут. Мы не будем выписывать в общем виде упрощенное уравнение, которое не содержит старших производных, — оно имеет простой, но достаточно громоздкий вид. Ограничимся случаем, когда члены, связанные с оператором соударений, входят только в выражения нулевого порядка  $\partial I^{(0)}/\partial x_i$ , а осциллирующие части (П2.18) имеются только у бесстолкновительных коэффициентов. В этом случае имеем

$$b_{ik} \equiv 0; \quad \partial a_i / \partial x_i \equiv 0. \quad (\text{П2.27})$$

Второе равенство (П2.27) следует из теоремы Лиувилля (П2.12) при учете (П2.15). При этом получим

$$\int^{\Delta \zeta} \frac{\partial a_i}{\partial \zeta} \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_j f_0) d\zeta = \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} f_0) - f_0 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (\text{П2.28})$$

где антисимметричная матрица  $T_{ij}$  имеет вид

$$T_{ij} = -T_{ji} = \frac{1}{C} \int^{\Delta \zeta} d\zeta \left( a_j \frac{\partial a_i}{\partial \zeta} \right). \quad (\text{П2.29})$$

Антисимметричность матрицы  $T_{ij}$  доказывается суммированием  $T_{ij}$  и  $T_{ji}$  с учетом периодичности величин  $(a_i a_j)$  (см. выше). Поправка второго порядка к вектору плотности потока (П2.24) имеет вид

$$I_i^{(2)} = \bar{I}_i^{(2)} + \tilde{I}_i^{(2)}; \quad (\text{П2.30})$$

где

$$\bar{I}_i^{(2)} = f_0 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{C} \int^{\Delta \zeta} \tilde{q} \frac{\partial a_i}{\partial \zeta} d\zeta; \quad (\text{П2.31})$$

$$\tilde{I}_i^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} f_0), \quad (\text{П2.32})$$

причем величина  $\tilde{I}_i^{(2)}$  выпадает из кинетического уравнения

(П2.22) вследствие антисимметричности  $T_{ij}$ . Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (I_i^{(0)} + \bar{I}_i^{(2)}) = \langle Q \rangle \int_{\Delta \xi} D d\xi. \quad (\text{П2.33})$$

Однако при вычислении собственно потоков  $I_i$  величину  $I_i^{(2)}$  (П2.32) обязательно следует учитывать.

Обсудим теперь кратко условия применимости полученных уравнений. Их можно установить из условия малости поправки  $f_1$  (П2.3) по сравнению с  $f_0$  (П2.4). Непосредственно из выражения для  $f_1$  (П2.20) видно, что требуемые условия имеют вид

$$|v_\zeta| \gg \frac{|a_i|}{DL_i}, \frac{|b_{im}|}{DL_i L_m}, \frac{\tilde{q}}{Df_0}, \quad (\text{П2.34})$$

где  $L_i$  — характерный масштаб изменения функции распределения или других величин по переменной  $x_i$ . Если ввести амплитуду «осцилляций» периодической величины  $F$

$$\delta F = \max |F - \langle F \rangle|, \quad (\text{П2.35})$$

то условия (П2.34) переписутся в виде

$$\Omega \sim \frac{|v_\zeta|}{\Delta \xi} \gg \frac{\delta A_i}{L_i}, \frac{\delta B_{im}}{L_i L_m}, \frac{\delta Q}{f_0}, \quad (\text{П2.36})$$

где  $\Omega$  имеет смысл частоты (точнее, обратного периода) «осцилляций» частицы по переменной  $\zeta$ . Неравенства (П2.36) имеют прозрачный физический смысл: они выражают малость относительного изменения различных величин за период одного колебания по переменной  $\zeta$  и совпадают с условиями адиабатичности.

### П3. УСРЕДНЕНИЕ ПО АКСИАЛЬНОМУ УГЛУ В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЕЙ [ВЫВОД ДРЕЙФОВО-КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (2.29)]

Дрейфово-кинетическое уравнение обычно получают подстановкой в кинетическое уравнение (2.1) хорошо известных выражений для  $dr/dt$ ,  $dv/dt$ . Последние обычно выводятся путем усреднения параметров отдельной частицы по ее быстрому ларморовскому вращению [10, 38, 39]. При кинетическом рассмотрении, однако, более последовательным является непосредственное усреднение функции распределения в кинетическом уравнении. Соответствующий вывод на основе описанного выше метода усреднения по периодической переменной (см. приложение П2) достаточно прост; он позволяет также легко определить неаксиально-симметричную поправку к усредненной функции распределения.

В качестве периодической переменной естественно взять аксиальный угол  $\varphi$  в цилиндрической системе координат в пространстве скоростей с осью  $z$ , направленной вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}$  (§ 2.2). При условии (2.18) можно не учитывать член, содержащий

производные по  $\varphi$  в операторе соударений (2.4а). Зависимость от  $\varphi$  в коэффициентах (2.5)–(2.13) отсутствует (эффектом классической диффузии пренебрегаем, см. § 2.2). Поэтому в данном случае усреднение касается только бесстолкновительной части кинетического уравнения, рассмотрением которой и ограничимся.

В качестве независимых переменных выберем координаты  $\mathbf{r}$ , полную энергию  $\mathcal{E}$  (2.20), магнитный момент  $\mu$  (2.21) и аксиальный угол  $\varphi$ . Якобиан преобразования имеет вид

$$D = \frac{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial(\mathbf{r}, \mathcal{E}, \mu, \varphi)} = \frac{B}{m^2 v_{\parallel}}, \quad (\text{П3.1})$$

где

$$v_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{B}/B. \quad (\text{П3.2})$$

Имеем при  $\zeta = \varphi$

$$v_{\zeta} = d\varphi/dt \approx -\omega = -eB/(mc) \quad (\text{П3.3})$$

(индексы  $B$ ,  $a$  в  $e_a$ ,  $m_a$ ,  $\omega_{Ba}$  для простоты опускаем). Условие (П2.12) выполнено автоматически. Далее,

$$A_{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt = v_{\parallel} \mathbf{b} + v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \varphi + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \varphi), \quad A_t = 1; \quad (\text{П3.4})$$

$$A_{\mathcal{E}} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} + e\Phi \right) = e \left\{ \left[ v_{\parallel} (\mathbf{E}_{\text{инд}} \cdot \mathbf{b}) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] + v_{\perp} (\mathbf{E}_{\text{инд}} \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \cos \varphi + v_{\perp} (\mathbf{E}_{\text{инд}} \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \sin \varphi \right\}; \quad (\text{П3.5})$$

$$A_{\mu} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m(v^2 - v_{\parallel}^2)}{2B} \right] = -\frac{\mu}{B} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{v_{\perp}}{B} [(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{G}) \cos \varphi + (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{G}) \sin \varphi] - \mu v_{\parallel} \{ [\boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \nabla) \mathbf{b} - \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \nabla) \mathbf{b}] \cos(2\varphi) + [\boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \nabla) \mathbf{b} + \boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \nabla) \mathbf{b}] \sin(2\varphi) \}, \quad (\text{П3.6})$$

где  $v_{\perp} = \sqrt{v^2 - v_{\parallel}^2}$ ;  $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$  — единичные векторы, образующие вместе с  $\mathbf{b}$  правовинтовую тройку взаимно ортогональных ортов (см. § 2.2); вектор  $\mathbf{G}$  есть

$$\mathbf{G} = e\mathbf{E}_{\text{инд}} - e\nabla\Phi - \mu\nabla B - mv_{\parallel}^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} - mv_{\parallel} \partial \mathbf{b} / \partial t. \quad (\text{П3.7})$$

При получении  $A_{\mathcal{E}}, A_{\mu}$  использовалось выражение для силы Лоренца

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \left\{ \mathbf{E}_{\text{инд}} - \nabla\Phi + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\}. \quad (\text{П3.8})$$

При получении выражения для  $A_{\mu}$  были использованы также уравнение Максвелла

$$\text{div}(\mathbf{B}\mathbf{b}) \equiv (\mathbf{b} \cdot \nabla) B + B \text{div} \mathbf{b} = 0 \quad (\text{П3.9})$$

и тождества

$$\mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \equiv \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \equiv 0; \quad \tau_1(\tau_1 \cdot \nabla) \mathbf{b} + \tau_2(\tau_2 \cdot \nabla) \mathbf{b} = \text{div } \mathbf{b}. \quad (\text{П3.10})$$

Из уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{П3.11})$$

следует, что при условии (2.18) последним слагаемым в  $\mathbf{G}$  (П3.7) можно пренебречь по сравнению с  $m v_{\parallel}^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}$ .

Усредненные выражения  $\langle A_i \rangle_{\xi}$ , связанные с движением в поперечном направлении к  $\mathbf{B}$ , в нулевом порядке теории возмущения обращаются в нуль. Поэтому здесь следует использовать более общее уравнение (П2.22), учитывающее вклад членов второго порядка малости. Поскольку усреднение по  $\xi = \varphi$  касается только бесстолкновительной части кинетического уравнения, то справедливы формулы (П2.27), (П2.28) и можно пользоваться уравнением (П2.33).

Из равенств (П3.4)—(П3.7) легко определяются  $\langle A_i \rangle$  и  $a_i$  (П2.15). Заметим, что вторые гармоники по углу  $\varphi$  содержатся только в  $A_{\mu}$ , и они не дают вклада в усредненное кинетическое уравнение (в интегралах  $\int_{\Delta \xi} \frac{\partial a_i}{\partial \xi} a_j d\xi$  вторые гармоники дают нулевой вклад, только если они присутствуют одновременно в  $a_i$  и  $a_j$ , но при  $i=j$  антисимметричная матрица  $T_{ij}$  обращается в нуль). Отметим также, что при вычислении производных  $\partial T_{ij} / \partial x_j$  в (П2.31) величины  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  считаются функциями  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $t$  (П2.27), (П2.28)

$$\left. \begin{aligned} m v_{\parallel}^2 &= 2(\mathcal{E} - \mu B(\mathbf{r}, t) - e\Phi(\mathbf{r}, t)); \\ m v_{\perp}^2 &= 2\mu B(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П3.12})$$

При вычислении  $\partial T_{ij} / \partial x_j$ , где оба индекса  $i, j$  относятся к пространственным переменным, следует быть особенно внимательным. Удобно проводить это вычисление, расписывая векторные выражения в явном виде по компонентам декартовой системы координат  $x, y, z$ . Такие члены в совокупности приведут к выражению типа  $\text{rot}(v_{\perp}^2 \mathbf{B} / 2v_{\parallel})$ . Проводя вычисления по формулам (П2.29), (П2.31) с учетом использования векторных тождеств

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} &= -[\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{b}]; \\ [(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \times \mathbf{b}] &= \text{rot } \mathbf{b} - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{b}); \\ \text{rot}[\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{b}] &= -\text{rot } \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \nabla) \text{rot } \mathbf{b} + (\text{rot } \mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П3.13})$$

приходим к дрейфово-кинетическому уравнению (2.29) или (2.23) [величина  $\tilde{q}$  считается равной нулю, обобщение на случай  $\tilde{q} \neq 0$  не представляет труда, см. формулу (П2.31)]. Выражения (П2.20) приводят к поправке первого порядка к аксиально-симметричной

функции  $f_0$  (2.26) (ограничиваемся наименьшими нечетными гармониками по углу  $\varphi$ , т. е. членами, пропорциональными  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$ ). Величины  $I_i^{(0)} + \bar{I}_i^{(2)}$  (П2.31), (П2.33) представляют собой компоненты плотности потока ведущих центров ларморовских орбит. Истинные же потоки частиц  $I_{\text{инст}}$  определяются величинами  $(I_i^{(0)} + \bar{I}_i^{(2)} + \bar{I}_i^{(2)})$  (П2.30); их можно получить также, исходя из аксиально-несимметричной поправки первого порядка к функции распределения (2.26).

#### П.4. УСРЕДНЕНИЕ ПО ПРОДОЛЬНОМУ ДВИЖЕНИЮ ЧАСТИЦ

Введем криволинейную систему координат  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  (см. § 2.3), связанную с магнитными силовыми линиями. Полученные здесь уравнения справедливы для любых координат  $\zeta_i$  [а не обязательно  $\zeta_1 = \zeta, \zeta_2 = \eta, \zeta_3 = \theta$ , (2.39)], лишь бы координаты  $\zeta_1, \zeta_2$  характеризовали силовую линию  $\mathbf{B}$ , а  $\zeta_3$  была текущей координатой вдоль данной силовой линии.

Используя консервативное преобразование (П1.4) — (П1.5), запишем дрейфово-кинетическое уравнение (2.29) в переменных  $t, \mu, \mathcal{E}, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{I}_t + \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \bar{I}_{\mathcal{E}} + \frac{\partial}{\partial \mu} \bar{I}_{\mu} + \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \bar{I}_{\zeta_1} + \\ + \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \bar{I}_{\zeta_2} + \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \bar{I}_{\zeta_3} = \bar{I}_Q; \end{aligned} \quad (\text{П4.1})$$

$$\bar{I}_{t, \mathcal{E}, \mu, Q} = \sqrt{G} \bar{I}_{t, \mathcal{E}, \mu, Q}; \quad (\text{П4.2})$$

$$\bar{I}_{\zeta_1} = \bar{I}_t \left\{ \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \frac{|v_{\parallel}|}{\omega_{B\alpha}} \text{rot}(|v_{\parallel}| \mathbf{b})^{(1)} + \frac{c}{B} [\mathbf{E}_{\text{инд}} \times \mathbf{b}]^{(1)} \right\}; \quad (\text{П4.3})$$

$$\bar{I}_{\zeta_2} = \bar{I}_t \left\{ \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + \frac{|v_{\parallel}|}{\omega_{B\alpha}} \text{rot}(|v_{\parallel}| \mathbf{b})^{(2)} + \frac{c}{B} [\mathbf{E}_{\text{инд}} \times \mathbf{b}]^{(2)} \right\}; \quad (\text{П4.4})$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\zeta_3} = \bar{I}_t \left\{ \pm \mathbf{b}^{(3)} |v_{\parallel}| + \frac{\partial \zeta_3}{\partial t} + \frac{|v_{\parallel}|}{\omega_{B\alpha}} \text{rot}(|v_{\parallel}| \mathbf{b})^{(3)} + \right. \\ \left. + \frac{c}{B} [\mathbf{E}_{\text{инд}} \times \mathbf{b}]^{(3)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П4.5})$$

(Выражения для  $\sqrt{G}, \mathbf{b}^{(3)}$  и т. д. определены в § 2.3.) Если считать переменную  $\zeta_3$  периодической с периодом  $\Delta \zeta_3$ , то, используя условия (2.117) — (2.120), можно применить метод усреднения, описанный в приложении П2. Заметим, что при условии (2.18) в выражении в фигурных скобках в (П4.5) можно пренебречь всеми остальными слагаемыми по сравнению с первым членом  $\pm b^{(3)} |v_{\parallel}|$ . Поэтому при учете (2.30)

$$\bar{I}_{\zeta_3} \approx \pm \frac{2\pi}{m_{\alpha}^2} B \sqrt{G} b^{(3)} f. \quad (\text{П4.6})$$

Постоянство величины  $C$  от  $\xi = \xi_3$  (П2.13) автоматически следует из тождества (2.42). Контравариантные компоненты  $\text{rot}(|v_{\parallel}| \mathbf{b})$  имеют вид [38, 58]:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}(|v_{\parallel}| \mathbf{b})^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_2} (b_3 |v_{\parallel}|) - \frac{\partial}{\partial \xi_3} (b_2 |v_{\parallel}|) \right\}; \\ \text{rot}(|v_{\parallel}| \mathbf{b})^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_3} (b_1 |v_{\parallel}|) - \frac{\partial}{\partial \xi_1} (b_3 |v_{\parallel}|) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.7})$$

Мы здесь ограничимся получением усредненного кинетического уравнения в нулевом порядке теории возмущения (П2.19)\*.

Переменную  $\xi_3$  можно считать периодической, например, для пролетных частиц, движущихся по замкнутому силовым линиям  $\mathbf{B}$ , или для любых пролетных частиц в условиях строгой аксиальной симметрии относительно оси вращения тора (см. § 2.3). Из (П4.1) — (П4.7), (2.29) — (2.34) при этом получим для ионов

$$\frac{\partial I_t}{\partial t} + \frac{\partial I_{\mathcal{G}}}{\partial \mathcal{G}} + \frac{\partial I_{\mu}}{\partial \mu} + \frac{\partial I_{\xi_1}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial I_{\xi_2}}{\partial \xi_2} = I_Q; \quad (\text{П4.8})$$

$$I_t = \frac{2\pi}{m_{\alpha}^2} B \sqrt{G} b^{(3)} J_1 f; \quad I_Q = \frac{2\pi}{m_{\alpha}^2} B \sqrt{G} b^{(3)} J_1 Q; \quad (\text{П4.9})$$

$$I_{\xi_1} = I_t \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \langle v_{\text{dr}}^{(1)} \rangle \right); \quad I_{\xi_2} = I_t \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \langle v_{\text{dr}}^{(2)} \rangle \right); \quad (\text{П4.10})$$

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{G}} &= \frac{2\pi}{m_{\alpha}^2} \left\{ B \sqrt{G} b^{(3)} \int \frac{\Psi'_t}{|v_{\parallel}|} dl \pm Z_{\alpha} e B \sqrt{G} b^{(3)} \int E_{\parallel} dl - \right. \\ &- m_{\alpha} \sqrt{G} \int B'_t |v_{\parallel}| d\xi_3 - m_{\alpha} c \frac{\partial}{\partial \xi_2} \int |v_{\parallel}| \sqrt{G} [\mathbf{E} \times \mathbf{b}]^{(2)} d\xi_3 - \\ &\left. - m_{\alpha} c \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int |v_{\parallel}| \sqrt{G} [\mathbf{E} \times \mathbf{b}]^{(1)} d\xi_3 - \frac{Z_{\alpha}^2 B \sqrt{G} b^{(3)}}{\sqrt{2m_{\alpha}}} \int \frac{\lambda \widehat{F} d\xi_3}{\sqrt{\mathcal{K}} |v_{\parallel}|} \right\} f; \end{aligned} \quad (\text{П4.11})$$

$$\begin{aligned} I_{\mu} &= -\frac{2\pi}{m_{\alpha}^2} \left\{ \frac{\mu B \sqrt{G} b^{(3)},^2}{\sqrt{2m_{\alpha}}} \int \frac{d\xi_3}{\mathcal{K}^{3/2}} \frac{\lambda}{|v_{\parallel}|} \left[ \widehat{F} + \frac{1}{B} \left( Z_{\text{ef}} - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{T_e}{2\mathcal{K}} \widetilde{Z}_3 + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{m_{\alpha}} \frac{\mathcal{K}}{T_e}} \right) (\mathcal{G} - \Psi_{\alpha}) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \right\} f; \end{aligned} \quad (\text{П4.12})$$

$$J_1 = \int \frac{dl}{|v_{\parallel}|}; \quad \langle v_{\text{dr}}^{(1)} \rangle = \frac{\partial J / \partial \xi_2}{\omega_{B\alpha} \sqrt{G} b^{(3)} \int dl / |v_{\parallel}|} +$$

\* При этом останется неучтенным ряд эффектов (см. § 2.7), который можно включить в рассмотрение при использовании уравнения в следующем порядке теории возмущения (П2.22). Мы здесь не будем этого делать, поскольку все эти эффекты не оказывают заметного влияния на ККП и их можно включить в рассмотрение независимо.

$$+ \left( c \int \frac{[\mathbf{E}_{\text{инд}} \times \mathbf{b}]^{(1)}}{|\mathbf{v}_{\parallel}| B} dl \right) / J_1; \quad (\text{П4.13})$$

$$dl = d\zeta_3 / b^{(3)};$$

$$J = \int |\mathbf{v}_{\parallel}| dl; \quad \langle v_{\text{др}}^{(2)} \rangle = - \frac{\partial J / \partial \zeta_1}{\omega_{B\alpha} \sqrt{G} b^{(3)} \int dl / |\mathbf{v}_{\parallel}|} +$$

$$+ \left( c \int \frac{[\mathbf{E}_{\text{инд}} \times \mathbf{b}]^{(2)}}{|\mathbf{v}_{\parallel}| B} dl \right) / J_1. \quad (\text{П4.14})$$

Здесь учтены равенства (2.40)–(2.42). Аналогичные выражения получаем и для электронов при замене (2.35). Здесь под  $f$  понимается усредненная по  $\zeta_3$  функция распределения. При получении (П4.8)–(П4.14) учтено легко доказываемое тождество

$$\mathbf{E} \text{ rot} (|\mathbf{v}_{\parallel}| \mathbf{b}) = - \frac{v_{\parallel}}{c} B'_t + \text{div} [\mathbf{b} |\mathbf{v}_{\parallel}| \times \mathbf{E}]. \quad (\text{П4.15})$$

Знаки  $\pm$  в (П4.11) отвечают двум противоположным направлениям движения частиц вдоль силовой линии  $\mathbf{B}$ .

Величина  $J$  есть адиабатический инвариант продольного движения [38, 39, 58]. Величина  $I_t$  представляет собой плотность числа частиц в элементе объема фазового пространства  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$ , проинтегрированную по координате  $\zeta_3$  по периоду вращательного преобразования силовой линии  $\mathbf{B}$  и по аксиальному углу  $\varphi$  в пространстве скоростей. Величины  $\langle v_{\text{др}}^{(1,2)} \rangle$  — это контравариантные компоненты усредненной дрейфовой скорости. Заметим, что в нашем рассмотрении дрейф в скрещенных магнитном и потенциальном электрическом полях  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  неявно содержится в слагаемых порядка  $\sim \partial J / \partial \zeta_{1,2}$  (туда же входит дрейф частиц в неоднородном и искривленном магнитном поле). Работа, совершаемая потенциальным электрическим полем в направлении дрейфа частиц, также неявно учтена тем фактом, что в качестве одной из независимых переменных выбрана полная энергия  $\mathcal{E}$ .

Рассмотрим теперь запертые частицы. При данных  $t$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  имеются две точки отражения  $\zeta_3^{(1)}$ ,  $\zeta_3^{(2)}$ , в которых

$$v_{\parallel}(t, \mathcal{E}, \mu, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3^{(1),(2)}) = 0. \quad (\text{П4.16})$$

При наличии ускоряющего электрического поля  $\mathbf{E}_{\parallel} = [\mathbf{E}_{\text{инд}} \times \mathbf{b}]$  функции распределения частиц, движущихся вдоль  $\mathbf{B}$  по ( $f^{(+)}$ ) или против ( $f^{(-)}$ ) этого поля, в общем случае различны. Однако после отражения от магнитных пробок частицы, движущиеся в одном направлении, превращаются в частицы, движущиеся в противоположном направлении. Поэтому вблизи точек отражения

$$f^{(+)} \Big|_{\zeta_3^{(1)}} = f^{(-)} \Big|_{\zeta_3^{(1)}}; \quad f^{(-)} \Big|_{\zeta_3^{(2)}} = f^{+} \Big|_{\zeta_3^{(2)}}. \quad (\text{П4.17})$$



Удобно при этом объединить обе группы запертых частиц  $f^{(+)}$  и  $f^{(-)}$  в одну, переопределив переменную  $\zeta_3$ . Сделаем это следующим образом. Пусть группа частиц с функцией распределения  $f^{(+)}$  характеризуется той же координатой  $\zeta_3$ , монотонно возрастающей от  $\zeta_3^{(1)}$  до  $\zeta_3^{(2)}$ :

$$\tilde{\zeta}_3 = \zeta_3. \quad (\text{П4.18})$$

Ту же переменную  $\tilde{\zeta}_3$  для частиц с функцией распределения  $f^{(-)}$  определим по-другому:

$$\tilde{\zeta}_3 = \zeta_3^{(2)} + |\zeta_3 - \zeta_3^{(2)}|, \quad (\text{П4.19})$$

т. е. так, чтобы, непрерывно продолжаясь через точку  $\zeta_3^{(2)}$ , эта переменная монотонно возрастала от  $\zeta_3^{(2)}$  к  $\zeta_3^{(1)}$ . При этом в выражении (П4.6) перед производной  $\partial f / \partial \tilde{\zeta}_3$  будет один знак для всех запертых частиц. Теперь можно считать функцию распределения обеих групп частиц однозначной функцией переменной  $\tilde{\zeta}_3$  (П4.18), (П4.19), которая согласно (П4.17) является непрерывной и периодической с периодом  $2 |\zeta_3^{(2)} - \zeta_3^{(1)}|$ .

Применяя теперь к функции распределения запертых частиц метод усреднения по периодической переменной (приложение П2), получаем уравнение, аналогичное (П4.8), в котором, однако, в величине  $I \mathcal{E}$  (П4.18) исчезает слагаемое, пропорциональное  $\pm \int E_{\parallel} dl$ , отвечающее ускорению (замедлению) частиц продольным электрическим полем. Интегрирование по  $\tilde{\zeta}_3$  в (П4.13), (П4.14) ведется между точками отражения  $\zeta_3^{(1)}$ ,  $\zeta_3^{(2)}$ . Функция распределения запертых частиц  $f^{\text{tr}}$  дается равенством

$$f^{\text{tr}}(t, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \mathcal{E}, \mu) = f(t, \zeta_1, \zeta_2, \mathcal{E}, \mu) H(\mathcal{E} - \Psi_{\alpha}(t, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3^{(1)(2)}, \mu)), \quad (\text{П4.20})$$

где  $f(t, \zeta_1, \zeta_2, \mathcal{E}, \mu)$  — усредненная функция распределения, являющаяся решением усредненного кинетического уравнения, а  $H(x)$  — ступенчатая функция (2.44). Равенство (П4.20) выражает тот факт, что за точками отражения  $\zeta_3^{(1)}$ ,  $\zeta_3^{(2)}$ , в которых  $v_{\parallel} = 0$  (П4.16), т. е.  $\mathcal{E} = \Psi_{\alpha}(t, \mu, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3^{(1)(2)})$  (2.28), частиц нет. Таким образом, в отличие от пролетных частиц функция распределения запертых частиц даже после усреднения обладает ступенчатой зависимостью от координаты  $\zeta_3$ . Функции распределения  $f^{(+)}$  и  $f^{(-)}$  для запертых частиц совпадают, что также отличает эти частицы от пролетных.

## П5. УСРЕДНЕНИЕ ПО КООРДИНАТЕ $\zeta$

Запишем кинетическое уравнение (2.47) для банановых частиц в виде

$$\partial I_i / \partial x_i + \partial I_i / \partial \zeta = I_Q, \quad (\text{П5.1})$$

где явно выделена координата  $\zeta$ , а остальные переменные  $t, \eta, \mathcal{E}, \mu$  обозначены  $x_i, i=1, 2, 3, 4$ . Зафиксируем теперь переменные  $x_i$  и будем монотонно изменять величину  $\zeta$ , что отвечает переходу с одной силовой линии на другую. На графике зависимости  $\Psi_\alpha(\theta)$  (см. рис. 8) такое изменение выглядит так, как будто гофры, «нанннанные» на более плавное тороидальное изменение  $\Psi_\alpha$ , перемещаются по нему в определенную сторону. Зафиксируем линию  $\mathcal{E} = \text{const} < \Psi_{\text{max}}$  (здесь также постоянны величины  $t, \eta, \mu$ ). Очевидно, что при изменении переменной  $\zeta$  от любого значения  $\zeta_0$  до  $\zeta_0 + 2\pi$  эту линию будут пересекать сепаратрисы, связанные с каждым из потенциальных горбов, причем таких пересечений будет два: на «спуске» и на «подъеме» — это отвечает двум точкам, расположенным симметрично в верхней и нижней половинах тора. Общее число пересечений на периоде  $\Delta\zeta$  равно, таким образом,  $2N$ , где  $N$  — число гофров. Проинтегрируем теперь (П5.1) по  $\zeta$  в интервале между двумя последовательными пересечениями сепаратрисы  $\zeta = \zeta_n(x_i)$  и  $\zeta = \zeta_{n+1}(x_i)$  [считаем, что зависимость  $\zeta_{n, n+1}$  от  $t, \eta, \mathcal{E}, \mu$  может быть получена обращением равенства (2.48)]. При этом получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_{\zeta_n+0}^{\zeta_{n+1}-0} I_i d\zeta \right) + \left( I_\zeta - I_i \frac{\partial \zeta_{n+1}}{\partial x_i} \right) \Big|_{\zeta=\zeta_{n+1}-0} - \\ - \left( I_\zeta - I_i \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i} \right) \Big|_{\zeta=\zeta_n+0} = \int_{\zeta_n+0}^{\zeta_{n+1}-0} I_Q d\zeta. \end{aligned} \quad (\text{П5.2})$$

Здесь выражение  $\zeta_n + 0$  означает, что величины берутся непосредственно над сепаратрисой  $\zeta = \zeta_n$ , а  $\zeta_{n+1} - 0$  — под сепаратрисой  $\zeta = \zeta_{n+1}$ . При переходе через сепаратрису  $\zeta = \zeta_{n+1}$  плотности потоков изменяются скачком. Свяжем соответствующие значения с помощью граничного условия (2.50), полагая в (2.51)  $F = \zeta - \zeta_n(x_i)$ :

$$\left. \begin{aligned} R_{n+1} \Big|_{\zeta_{n+1}+0} = R_{n+1} \Big|_{\zeta_{n+1}-0} \pm R_{n+1}^L \Big|_{\zeta_{n+1}-0}; \\ R_{n+1} = \left( I_\zeta - I_i \frac{\partial \zeta_{n+1}}{\partial x_i} \right); \quad R_{n+1}^L = \left( I_\zeta^L - I_i^L \frac{\partial \zeta_{n+1}}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{П5.3})$$

где  $I_{\zeta, i}^L$  — значение плотности потока локально-запертых частиц на данной сепаратрисе, знаки  $\pm$  отвечают тому, в какой половине тора произошло пересечение с сепаратрисой [в одной из них увеличение  $\zeta$  приводит к уменьшению  $\Psi_\alpha(\zeta)$ , а в другой — к увеличению, локальная яма гофра всегда существует только при  $\mathcal{E} < \Psi_\alpha(\zeta)$ ]. Суммируя теперь выражения (П5.2) от  $n=0$  до  $n=2N$ , при учете (П5.3) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_{\zeta_i}^{\zeta_i + \Delta\zeta} I_i d\zeta \right) = \int_{\zeta_i}^{\zeta_i + \Delta\zeta} I_Q d\zeta + \sum_{n=1}^N R_n^L \Big|_a - \sum_{n=1}^N R_n^L \Big|_b. \quad (\text{П5.4})$$

Здесь подстановки на концах интервала суммирования взаимно уничтожились из-за периодичности всех величин по  $\zeta$  (2.38). Индексы  $a, b$  в (П5.4) учитывают отдельно вклады локально-запертых частиц в разных половинах тора.

Напишем теперь для локально-запертых частиц в данном гофре  $n$  уравнение типа (П5.1) и проинтегрируем его по  $\zeta$  в интервале от  $\zeta_n$  до  $\zeta_n$ , где  $\zeta = \zeta_n(x_i)$  отвечает «дну» локальной потенциальной ямы данного гофра. Аналогично (П5.4)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\zeta_n}^{\zeta_n} I_i^L d\zeta = \int_{\zeta_n}^{\zeta_n} I_Q^L d\zeta - R_n^L. \quad (\text{П5.5})$$

Здесь учтено, что поток через поверхность «дна» потенциальной ямы отсутствует. Учитывая (П5.5), приведем выражение (П5.1) к виду (2.55), имеющему простой и наглядный физический смысл: оно выражает закон сохранения суммарного числа частиц при наличии переходов из группы банановых частиц в группу локально-запертых и наоборот.

В этом уравнении предполагается, что функции распределения банановых и локально-запертых частиц выражены через одни и те же переменные  $t, \mu, \mathcal{E}, \eta, \zeta$ . Для локально-запертых частиц, однако, более удобными переменными являются величины  $t, \mu, \chi, \eta(L), \Psi$  (см. § 2.8) \*. При этом кинетическое уравнение для них не будет содержать производных по  $\mu, \Psi$  (2.78). В этих переменных сепаратриса определяется равенством (2.80), т. е.

$$G \equiv \chi - 1 = 0, \quad (\text{П5.6})$$

а кинетическое уравнение для локально-запертых частиц имеет вид [ср. с (2.76)]

$$\frac{\partial \tilde{I}_t^L}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{I}_\eta^L}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{I}_\chi^L}{\partial \chi} = \tilde{I}_Q; \quad \tilde{I}_{t,\chi,Q}^L = I_{t,\chi,Q} \frac{v_{dr}}{v_{dr}}; \quad \tilde{I}_\eta^L = I_\eta^L. \quad (\text{П5.7})$$

Интегрируя (П5.7) по переменной  $\chi$  от нуля до единицы, получаем согласно (П5.6)

$$\tilde{R}_n^L = \tilde{I}_\chi^L \frac{\partial G}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} \equiv \tilde{I}_\chi^L \Big|_{\chi=1} = \langle \tilde{I}_Q^L \rangle_\chi - \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{I}_t^L \rangle_\chi - \frac{\partial}{\partial \eta} \langle \tilde{I}_\eta^L \rangle_\chi, \quad (\text{П5.8})$$

где среднее по  $\chi$  определено в (2.90). Связывая величины  $R_n^L$  (П5.3) и  $\tilde{R}_n^L$  (П5.8) с помощью консервативного преобразования (П.1.16), получаем

$$\left| \frac{D(y)}{D(x)} \frac{\delta F}{\delta G} \right| = \left| \frac{\partial \zeta_n}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \right|_{\substack{\zeta_n = \zeta \\ \mathcal{E} = \Psi}} \equiv 1; \quad (\text{П5.9})$$

$$R = \tilde{R}_n. \quad (\text{П5.10})$$

\* Здесь удобно оставить координату  $\eta$  вместо  $L$ . При  $\mu = \text{const}, \Psi = \text{const}$  (2.63) величина  $\eta$  является однозначной функцией  $L$  (2.72).

Подставляя (П5.4) вместо  $R^L_n$  величины  $R^L_n$  и учитывая (П5.10), приходим окончательно к уравнению (2.85).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pfirsch D., Schlüter A. Rept. MPI/PA (7)/62. Max-Planck Institute, Munich. 1962.
2. Галеев А. А., Сагдеев Р. З.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973, Вып. 7. С. 205—273.
3. Kadomtsev B. B., Pogutse O. P.//Nucl. Fus. 1971. Vol. 11. P. 67—92.
4. Gurevich A. V., Dimant Ya. S. Ibid. 1981. Vol. 21. P. 159—173.
5. Stringer T. E.//Ibid. 1972. Vol. 12. P. 689—694.
6. Connor J. W., Hastie R. J. Ibid. 1973. Vol. 13. P. 221—225.
7. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
8. Грибов Ю. В., Цаун С. В., Юшманов П. Н. Препринт ИАЭ-3681/7. М., 1982.
9. Юшманов П. Н. Диффузионные транспортные процессы в токамаках, обусловленные гофрировкой//Наст. сб. с. 102.
10. Сивухин Д. В./Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 7—97.
11. Dnestrovskij Yu. N., Kostomarov D. P., Lysenko S. E.//Nucl. Fus. 1975. Vol. 15. P. 1185—1188.
12. Berezovskij E. L., Izvozchikov A. V., Petrov M. P. e a.//Nucl. Fus. 1983. Vol. 23. P. 1575—1592.
13. Gurevich A. V., Dimant Ya. S.//Ibid. 1978. Vol. 18. P. 629—646.
14. Гуревич А. В., Димант Я. С., Днестровский Ю. Н., Разумова К. А.//Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. С. 733—736.
15. Гуревич А. В., Димант Я. С., Днестровский Ю. Н.//Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. С. 71—73.
16. Димант Я. С. Препринт ФИАН, № 14. М., 1979.
17. Petrie T. W., Rawls J. M. Burn control resulting from toroidal field ripple//Nucl. Fus. 1980. Vol. 20. P. 419—428.
18. Dreicer H.//Phys. Rev. 1959. Vol. 115. P. 238—249; 1960. Vol. 117. P. 329—342.
19. Гуревич А. В.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1960. Т. 39. С. 1296—1307.
20. Kruskal M. D., Bernstein I. B.//Princeton Plasma Phys. Lab. Report, № МАТТ-Q-20. 1962.
21. Лебедев А. Н.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1965. Т. 48. С. 1393—1396.
22. Гуревич А. В., Димант Я. С., Днестровский Ю. Н., Смирнов А. П.//Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 777—785.
23. Параил В. В., Погуце О. П.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича, Б. Б. Кадомцева М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 11. С. 5—55.
24. Гуревич А. В., Живлюк Ю. Н. Препринт ФИАН № А-90. М., 1965.
25. Gurevich A. V., Dimant Ya. S., Dnestrovskij Yu. N. e. a.//11 Europ. Conf. Aachen. 1983. Part II. EPS PPD. E-48. P. 267—270.
26. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1973.
27. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
28. Параил В. В., Погуце О. П. Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32. С. 408—411.
29. Гуревич А. В., Зыбин К. П., Истомин Я. Н.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1983. Т. 84. С. 86—102.
30. Schuss J. J. Nucl. Fus. 1980. Vol. 20. P. 1160—1164.
31. Tani K., Azumi M., Kishimoto H., Tamura S.//J. Phys. Soc. Japan. 1981. Vol. 50. P. 1726—1737.
32. Fowler R. H., Holmes J. A., Rome J. A.//Oak Ridge National Lab. Rep. ORNL/TM—6845, 1979.

33. Hitchon W. N. G., Beidler C. B., Mynick H. E., Shohet J. D.//Nucl. Fus. 1985. Vol. 25. P. 105—107.
34. Ландау Л. Д.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1937. Т. 7. С. 203—209.
35. Беляев С. Т./Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций/М.: Изд-во АН СССР, 1958. Том III. С. 50—65.
36. Кадомцев Б. Б./Там же. Том IV. С. 370—379.
37. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З./Там же. Том III. С. 268—277.
38. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 177—261.
39. Бернштейн А.//Достижения физики плазмы/Под ред. А. Саймона, В. Б. Томсона/Пер. под ред. М. С. Рабиновича. М.: Мир, 1974.
40. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
41. Брагинский С. И.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183—272.
42. Furth H. P.//Nucl. Fus. 1975. Vol. 15. P. 487—534.
43. Гуревич А. В., Истомин Я. Н./Журн. эксперим. и теорет. физ. 1979. Т. 77. С. 933—945.
44. Davidson J. N. /Nucl. Fus. 1976. Vol. 16. P. 731—742.
45. Tsang K. T. /Ibid. 1977. Vol. 17. P. 557—563.
46. Boozer A. H. /Phys. Fluids. 1980. Vol. 23. P. 2283—2290.
47. Goldston R. J., Towner H. H. /J. Plasma Phys. 1981. Vol. 26. Part 2. P. 283—307.
48. Yushmanov P. N.//Nucl. Fus. 1983. Vol. 23. P. 1599—1612.
49. Петров М. П./Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Vienna, 1975. Vol. 1. P. 43—51.
50. Александров Е. В., Афросимов В. В., Березовский Е. Л. и др./Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 3—7.
51. Заверьяев В. С., Извозчиков А. Б., Лысенко С. Е., Петров М. П.//Физика плазмы. 1978. Т. 4. С. 1205—1210.
52. Scott S. D., Lyon J. F., Munro J. K. e. a.//Nucl. Fus. 1985. Vol. 25. P. 359—382.
53. Юшманов П. Н./Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. С. 97—100.
54. Yushmanov P. N. /Nucl. Fus. 1982. Vol. 22. P. 315—324.
55. INTOR, Zero Phase. Vienna, IAEA, 1980.
56. INTOR, Phase One. Vienna, IAEA, 1982.
57. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
58. Кадомцев Б. Б.//Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Том III. С. 285—299.

# ДИФфуЗИОННЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТОКАМАКАХ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ГОФРИРОВКОЙ

П. Н. Юшманов

---

## ВВЕДЕНИЕ

Дискретная структура магнитной системы токамака, состоящей из  $N$  отдельных катушек, нарушает аксиальную симметрию системы и приводит к увеличению радиального переноса. Интерес к исследованию гофрировочных потерь связан в основном с разработкой проектов токамаков с реакторными параметрами. Гофрировочный перенос довольно резко зависит от глубины гофрировки, которая, в свою очередь, определяется конструкцией и числом катушек тороидального поля. Катушки тороидального магнитного поля являются значительной и весьма дорогостоящей частью термоядерной установки, поэтому знание критериев на их конструкцию позволяет минимизировать стоимость термоядерного реактора. Так, анализ гофрировочного переноса для INTOR позволил повысить гофрировку с 0,3 % на внешнем краю камеры, которая была принята сначала, до 1,2 % на фазе ПА, что позволило уменьшить размеры катушек, а следовательно, и их цену на 20 %.

Дополнительный к неоклассическому гофрировочный перенос создается преимущественно двумя группами частиц: локально-запертыми частицами, захваченными в областях минимума  $B$  между катушками тороидального поля, и банановыми частицами, запертыми на внешнем обводе тора. Типично, что при относительно высокой гофрировке ( $\delta \geq 0,5\%$ ) преобладают потери за счет локально-запертых частиц, а при более низких значениях гофрировки ( $\delta \leq 0,5\%$ ), характерных для проектируемых термоядерных установок, основными становятся гофрировочные потери банановых частиц. В настоящем обзоре рассмотрены транспортные процессы, связанные с обеими группами частиц, но только в тех случаях, когда эти процессы носят диффузионный характер. Фактически это означает, что частицы не сильно смещаются относительно магнитной поверхности по сравнению с характерным размером неоднородности системы за время столкновительного изменения их траекторий движения. Если радиальное смещение частиц становится сравнимым с размером неоднородности, что возможно для локально-запертых частиц при низких частотах соударений, то перенос носит конвективный характер. Процессы этого типа рассматриваются в обзоре А. В. Гуревича и Я. С. Диманта, помещенном в этом же томе.

Важнейшей характеристикой, определяющей как тип переноса,

так и транспортные коэффициенты, является вид траекторий частиц. Влияние гофрировки на орбиты банановых частиц сводится к радиальному смещению при каждом прохождении точки отражения. При этом смещение зависит от гофрировки в вершинах банановой орбиты. Локально-запертые частицы вообще существуют только вследствие азимутальной неоднородности тороидального магнитного поля. Поэтому не только их траектории, но и область существования зависят от пространственного распределения гофрировки. Многообразие различных режимов переноса (в сумме для локально-запертых и банановых более 10) не позволяет рассматривать все их сочетания, возникающие при произвольном распределении гофрировки по сечению шнура. Поэтому в настоящем обзоре рассматриваются только ситуации, реализующиеся либо в современных токамаках, либо в проектируемых токамаках-реакторах.

В соответствии с приведенными выше вводными замечаниями организована и структура обзора. В гл. 1 рассматриваются неоднородность магнитного поля, возникающая из-за дискретности магнитной системы токамака, и траектории частиц, движущихся в таких полях. Здесь же описываются бесстолкновительные переходы частиц из локально-запертых в банановые и обратно, играющие важную роль в процессах переноса, обусловленных локально-запертыми частицами. Главы 2 и 3 посвящены гофрировочным потерям, связанным соответственно с локально-запертыми и банановыми частицами. В этих главах рассматривается преимущественно тепловая компонента плазмы. Гофрировочные потери надтепловых частиц анализируются в гл. 4. Обсуждение некоторых специальных вопросов, в частности рассмотрение режимов, хотя и реализующихся в токамаках, но слабо влияющих на полные транспортные коэффициенты, вынесено в приложения. В приложениях также дается обобщение основных формул для гофрировочного переноса на токамаки некруглого сечения.

## **1. ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ В ГОФРИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ТОКАМАКА**

### **1.1. Гофрировка тороидального магнитного поля токамака**

**Магнитное поле токамака.** В узком смысле под гофрировкой понимается неоднородность магнитного поля, обусловленная дискретностью магнитной системы, поскольку в этом случае поверхности  $B = \text{const}$  и магнитные поверхности становятся гофрированными. Однако по схожести вызываемых физических процессов к гофрировке можно отнести все слабые нарушения аксиальной симметрии тороидального магнитного поля независимо от причин, их вызывающих.

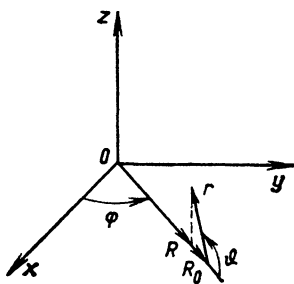
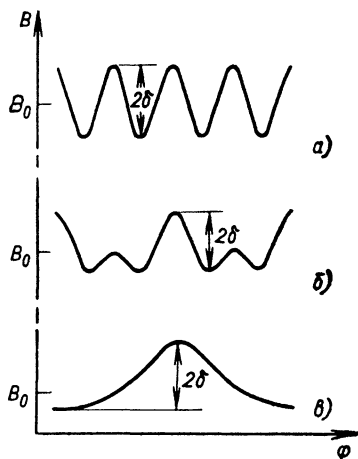


Рис. 1. Тороидальная система координат

Рис. 2. Типы возмущения тороидального магнитного поля: а — возмущение, создаваемое равномерно распределенными катушками; б — возмущение от попарно сдвинутых катушек; в — возмущение поля в установке Alcator



Введем тороидальную систему координат  $r, \vartheta, \varphi$  (рис. 1)

$$R = R_0 + r \cos \vartheta = R_0 h, \quad z = r \sin \vartheta, \quad (1.1)$$

где  $h = 1 + \varepsilon \cos \vartheta$ ,  $\varepsilon = r/R_0$  — отношение малого радиуса тора к большому;  $\vartheta$  и  $\varphi$  — полоидальный и тороидальный углы. Тороидальное поле идеального аксиально-симметричного токамака уменьшается пропорционально  $1/R$  и не зависит от  $\varphi$ :

$$\bar{B}(r, \vartheta) = (B_0 e_\varphi + B_p(r) e_\vartheta) R_0/R, \quad (1.2)$$

где  $B_0$  — напряженность основного тороидального магнитного поля, а  $B_p$  — напряженность поля тока. Здесь и далее считается, что магнитные поверхности токамака близки к круговым. Обобщение на случай произвольных магнитных поверхностей сделано в приложении П5. В реальных системах  $\mathbf{B}$  зависит от всех трех координат:

$$\mathbf{B}(r, \vartheta, \varphi) = \bar{\mathbf{B}}(r, \vartheta) + \tilde{\mathbf{B}}(r, \vartheta, \varphi), \quad (1.3)$$

где  $\tilde{\mathbf{B}} = \{\tilde{B}_\varphi, \tilde{B}_\nu, \tilde{B}_r\}$  — добавка к магнитному полю, обусловленная аксиальной несимметрией. Вид функции  $B(\varphi) \approx B_0 + \tilde{B}_\varphi$  при фиксированных  $r$  и  $\vartheta$  может сильно различаться в зависимости от причины, вызывающей нарушение аксиальной симметрии (рис. 2).

Определим глубину гофрировки как амплитуду возмущения тороидального магнитного поля

$$\delta(r, \vartheta) = (B_x - B_n)/(B_x + B_n), \quad (1.4)$$

где максимальное  $B_x$  и минимальное  $B_n$  значения берутся при постоянных  $r$  и  $\vartheta$ . Для анализа физических процессов, обусловленных гофрировкой, одной амплитуды возмущения, однако, недо-



статочно. Важна и его форма, т. е. крутизна склонов или крутизна ямы. Возмущения любой формы могут быть представлены в виде суммы синусоидальных гармоник. Но в большинстве случаев внутри тороидальной камеры существенна только одна из них. Этой гармонике и будем приписывать суммарную амплитуду возмущения  $\delta$ . В результате тороидальное магнитное поле токамака представляется в виде

$$B_{\varphi}(r, \vartheta, \varphi) = (1 + \delta(r, \vartheta) \cos(N\varphi)) B_0 R_0 / R. \quad (1.5)$$

Возмущение поля при этом характеризуется амплитудой  $\delta(r, \vartheta)$  и номером гармоники  $N$ . Если нарушение аксиальной симметрии вызвано только дискретностью магнитной системы, то номер гармоники  $N$  совпадает с числом катушек. В более сложных случаях, как, например, на рис. 2, в, возмущение представляется широким спектром гармоник. Однако и в этом случае физически оправдано выделять одну гармонику, выбирая номер так, чтобы ближе всего описать крутизну склонов зависимости  $B(\varphi)$ .

Две другие компоненты поля  $\vec{B}$  сдвинуты по фазе относительно  $\vec{B}$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_{\vartheta} &= B_0(R_0/R) \delta_{\vartheta}(r, \vartheta) \sin(N\varphi); \\ \bar{B}_r &= B_0(R_0/R) \delta_r(r, \vartheta) \sin(N\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

В общем случае величины  $\delta$ ,  $\delta_{\vartheta}$  и  $\delta_r$  могут быть вычислены только численно прямым расчетом напряженности магнитного поля. Однако в простейших случаях, когда могут быть использованы соображения симметрии (см. приложение П1),  $\delta_{\vartheta}$  и  $\delta_r$  выражаются через  $\delta$  с помощью уравнения  $\Delta \vec{B} = 0$ . Необходимо отметить, что в токамаке  $g$ - и  $\vartheta$ -компоненты возмущения магнитного поля (1.6) не играют существенной роли, поскольку амплитуда магнитного поля, определяющая в основном движение частиц, практически совпадает с тороидальной компонентой поля  $B \approx B_0/h + \bar{B}_{\vartheta}$ . Поэтому в дальнейшем в большинстве случаев речь идет только о возмущении тороидального магнитного поля  $\bar{B}_{\varphi}$  и гофрировке  $\delta(r, \vartheta)$ .

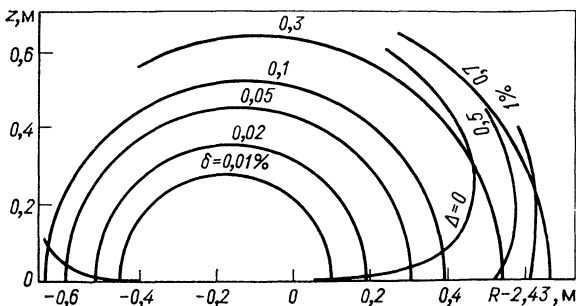


Рис. 3. Расчетные линии уровня гофрировки для установки Т-15 (гофрировка в нижней полуплоскости симметрична)

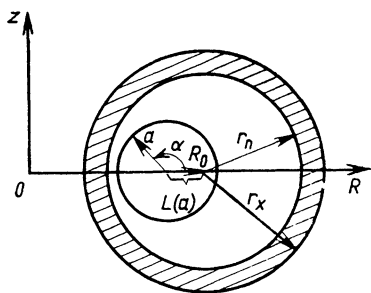


Рис. 4. Система координат для вычисления гофрировки в токамаке с круглыми катушками

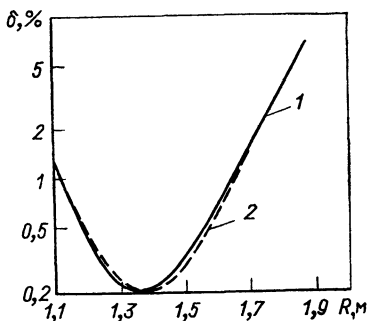


Рис. 5. Сравнение данных численного расчета гофрировки (1) с расчетом по приближенной формуле (1.7) (2) для установки Т-10 в плоскости  $z=0$

**Гофрировка в токамаках с круглыми катушками.** В часто встречающемся случае магнитной системы с равномерно распределенными круглыми катушками линии уровня  $\delta(r, \vartheta) = \text{const}$  близки к окружностям с центрами, смещенными относительно центра катушек к главной оси тора (рис. 3). Знание формы линий уровня позволяет получить (см. приложение П1) удобную формулу для зависимости гофрировки от  $r$  и  $\vartheta$  [1]:

$$\left. \begin{aligned} \delta(r, \vartheta) &= \delta_n I_0 \left( \frac{Na}{R_0 - L_0} \right); \\ a &= | \mathbf{r} - \mathbf{L}(a) |; \\ L(a) &= L_0 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0 - L_0}, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя;  $\delta_n$  и  $L_0$  — параметры, определяемые формой катушек;  $a$  — радиус окружности  $\delta = \text{const}$  (рис. 4), следующим образом выражающийся через  $r$  и  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} a &= \left[ 2(R_0 - L_0) \left( R - \sqrt{R^2 - r^2 - L_0^2 - 2rL_0 \cos \vartheta} \right) \right]^{1/2} \approx \\ &\approx [(r^2 + L_0^2 + 2rL_0 \cos \vartheta)(R_0 - L_0)/R]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Приближенные значения параметров  $\delta_n$  и  $L_0$  можно определить из того условия, что при  $a = (r_n + r_x)/2$ ,  $\delta \approx 1$ ,  $L \approx 0$

$$L_0 \approx \frac{(r_n + r_x)^2}{8R_0}; \quad \delta_n \approx \left[ I_0 \left( \frac{N}{2} \frac{r_n + r_x}{R_0 - L_0} \right) \right]^{-1}, \quad (1.9)$$

где  $r_n$  и  $r_x$  — внутренний и наружный радиусы обмотки тороидального поля.

Со значительно более высокой точностью, достаточной для вычисления гофрировки, константы  $\delta_n$  и  $L_0$  могут быть найдены из

Таблица 1.1. Параметры аппроксимационной формулы (1.7) и глубина гофрировки на внешнем краю вакуумной камеры для некоторых установок с круглыми катушками

Установка	$R_0$ , м	$N$	$L_0$ , м	$\delta_n$ , %	$r$ , м	$\delta(r, 0)$ , %
T-10	1,50	16	0,137	0,193	0,40	7,0
T-7	1,22	24	0,10	0,01	0,35	3,7
T-15	2,43	24	0,189	0,0018	0,70	0,8
ASDEX	1,65	16	0,25	0,024	0,40	1,8
TFTR	2,65	20	0,50	0,0009	1,10	8,5
PLT	1,30	18	0,248	0,0008	0,50	2,0
JT-60	3,00	18	0,647	0,0002	0,95	0,35

сравнения формул (1.7) с численными расчетами. Поскольку констант только две, то достаточно рассчитать гофрировку лишь в нескольких точках. Точность, даваемая формулой (1.7) при таком выборе констант, проиллюстрирована на рис. 5 на примере установки T-10. Как видно из рисунка, значения гофрировки, рассчитанные численно и полученные по приближенной формуле (1.7), совпадают с погрешностью не более 5%. Значения констант  $\delta_n$  и  $L_0$  для некоторых установок с круглыми катушками приведены в табл. 1.1.

Приближенные формулы (1.7)—(1.9) позволяют легко понять, почему в плазменном объеме достаточно сохранить лишь одну, наиболее низкую гармонику возмущения тороидального поля. Согласно (1.7)  $\delta(r) \sim \exp(Na/R_0 - L_0)$ , поэтому гармоники с большими номерами спадают по мере удаления от катушек значительно быстрее. Роль экспоненциального множителя настолько велика, что независимо от соотношения амплитуд гармоник вблизи катушек в плазме существенной остается только гармоника с нижшим номером. Так, в установках с попарно сдвинутыми катушками, какой, например, является T-7, номер наименьшей гармоники гофрировки в 2 раза меньше числа катушек. Рассуждения о скорости спада гармоник возмущения с разными номерами справедливы при любой форме катушек. Поэтому в дальнейшем всегда будем рассматривать только одну гармонику гофрировки тороидального магнитного поля.

**Гофрировка в токамаках с произвольными катушками.** Для магнитной системы с произвольной формой катушек тороидального поля гофрировку рассчитывают численно. Результаты расчетов для проектов токамаков INTOR и NET, имеющих D-образные катушки, представлены на рис. 6 и 7. Рассчитанные значения глубины гофрировки для INTOR могут быть с относительной погрешностью, не превышающей 3%, аппроксимированы полиномом

$$\delta(R, z) = 10^{-4}(8,9 + 15,9x + 18,4x^2 + 9,9x^3 + 7,0x^4 + 3,0z^2 + 7,35xz^2 + 4,44x^2z^2 + 0,75z^4), \quad (1.10)$$

где  $x = R - 5,2$ .

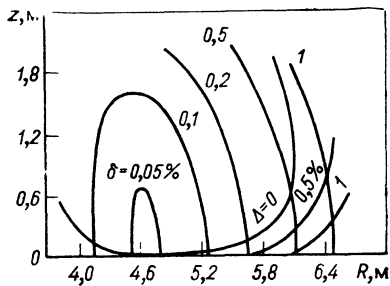


Рис. 6. Линии уровня гофрировки и глубины магнитных ям для INTOR (вариант проекта на фазе II=A,  $N=12$ )

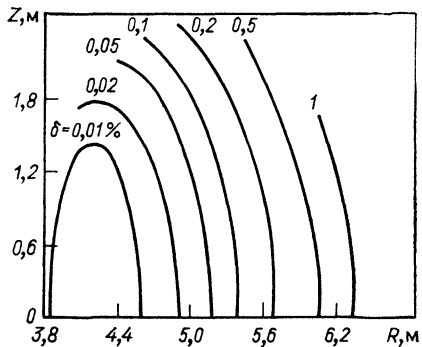


Рис. 7. Линии уровня гофрировки токамака NET (вариант проекта II,  $N=16$ )

Из указанных выше установок сильно выделяется Alcator, возмущение тороидального поля которого из-за конструктивных особенностей имеет вид, изображенный на рис. 2, б. Амплитуда возмущения  $\delta(R)$  в плоскости  $z=0$  для установки Alcator C приведена на рис. 8. По тороидальной координате возмущения поля представляют собой шесть ямок (по числу патрубков) с характерной крутизной склонов, соответствующей  $N \sim 20$  на внешнем обводе тора и  $N \sim 10$  вблизи оси и на внутреннем обводе.

Несколько слов необходимо сказать о нарушении аксиальной симметрии, связанном с неточностью изготовления или установки катушек. Возмущения поля в этом случае нерегулярны и включа-

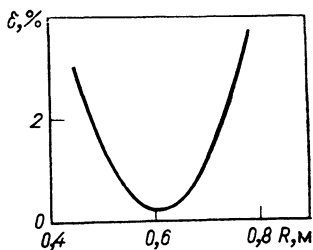


Рис. 8. Глубина гофрировки установки Alcator C в плоскости  $z=0$

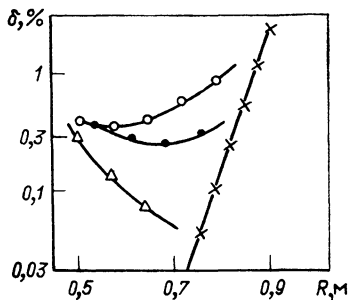


Рис. 9. Глубина гофрировки токамака T-11 в плоскости  $z=0$ :

× — равномерно распределенные катушки; ○ — сдвиг одной катушки по углу  $R\Delta\phi=1$  см; ● — радиус одной катушки увеличен  $\Delta r_n = \Delta r_x = 1$  см; △ — сдвиг одной катушки наружу на 1 см

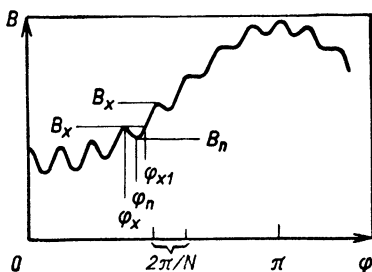
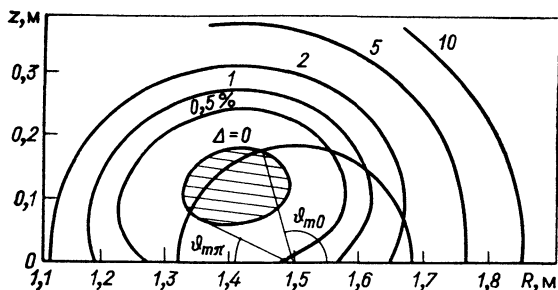


Рис. 10. Амплитуда напряженности магнитного поля на силовой линии

Рис. 11. Линии уровня локальных магнитных пробок для установки Т-10 при  $q(0)=1$ ,  $q(0,3 \text{ м})=3$  (область, где нет локальных магнитных пробок, заштрихована)



ют гармоники с низкими номерами, поэтому они довольно эффективно проникают в центр камеры. На рис. 9 показано влияние различных сантиметровых смещений (примерно 0,01 характерного размера) одной катушки на гофрировку установки Т-11 в плоскости  $z=0$ . Изменение смещения приводит к линейному изменению амплитуды возмущения. Тороидальная зависимость неоднородности магнитного поля соответствует гармонике с  $N \sim 6 \div 8$ , поэтому амплитуда возмущения значительно слабее уменьшается с радиусом, чем гофрировка идеальной магнитной системы. Для установок масштаба INTOR неточность изготовления или установки катушки на 1 см приводит к дополнительной неоднородности магнитного поля  $\delta \sim 0,03\%$  на оси камеры.

**Локальные магнитные пробки.** Одним из важнейших явлений, связанных с гофрировкой, является захват частиц в локальные магнитные пробки. Локальные пробки возникают, если на силовой линии появляются локальные экстремумы напряженности магнитного поля (рис. 10). Точки, где достигаются экстремумы, и значения  $B_x$  и  $B_n$  можно вычислить, воспользовавшись моделью поля с одной гармоникой возмущения (1.3) — (1.6). Учитывая, что в токамаке напряженность тороидального поля  $B_0$  значительно больше напряженности поля тока  $B_p$ , уравнение для определения положения экстремумов напряженности магнитного поля  $B \approx$

$\approx B_0(1 + \delta(r, \vartheta) \cos(N\varphi))/h$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dB}{dl} = \frac{B_\varphi}{BR} \frac{\partial B}{\partial \varphi} + \frac{B_\vartheta}{B_r} \frac{\partial B}{\partial \vartheta} + \frac{B_r}{B} \frac{\partial B}{\partial r} = \\ &= \frac{B_0 R_0}{R^2} \left[ (-N\delta + \delta_\vartheta \sin \vartheta - \delta_r \cos \vartheta) \sin(N\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{q} \frac{\partial \delta}{\partial \vartheta} \cos(N\varphi) + \frac{B_p}{B_0} \sin \vartheta \right], \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $q = rB_0/R_0B_p \geq 1$  — коэффициент запаса устойчивости. Возмущения радиального и полоидального полей не превышают возмущения тороидального поля (Пл.11), а номер гармоники типично велик ( $N \geq 10$ ), поэтому величинами  $\delta_\vartheta$  и  $\delta_r$  можно пренебречь по сравнению с  $N\delta$ . Оценивая  $\partial\delta/\partial\vartheta$  как  $\delta$ , можно также пренебречь и  $q^{-1}\partial\delta/\partial\vartheta$  по сравнению с  $N\delta$ . По аналогичным соображениям в силу неравенства  $Nq \gg 1$  при решении уравнения (1.11) можно считать постоянным полоидальный угол. В результате этих упрощений положения экстремумов будут задаваться выражениями

$$N\varphi_x = \arcsin Y, \quad N\varphi_n = \pi - \arcsin Y, \quad (1.12)$$

где  $Y = r|\sin \vartheta|/(NqR_0\delta(r, \vartheta))$ , а выражение для относительной глубины локальных магнитных пробок, которые возникают [2] только при  $Y < 1$  или

$$r|\sin \vartheta| < NqR_0\delta(r, \vartheta), \quad (1.13)$$

примет вид [3]

$$\Delta(r, \vartheta) = (B_x/B_n) - 1 \approx 2\delta(\sqrt{1 - Y^2} - Y \arccos Y). \quad (1.14)$$

Величина  $\Delta$  достигает максимума  $\Delta = 2\delta(r, \vartheta)$  при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  и плавно уменьшается до нуля при приближении к границе существования пробок  $\vartheta_m$

$$r \sin \vartheta_m = NqR_0\delta(r, \vartheta_m). \quad (1.15)$$

Отметим, что формулы (1.12) и (1.14) становятся несправедливыми при  $N^2q^2R\delta < r$ . Это условие эквивалентно неравенству  $\sin \vartheta < Y/(Nq)$ . Поэтому зона, где формулы (1.12) и (1.14) несправедливы, довольно узка ( $|\vartheta| < 1/Nq$ ) и не оказывает существенного влияния на процессы переноса.

На рис. 11 приведена типичная картина линий уровня  $\Delta = \text{const}$  для токамака с большой гофрировкой Т-10. Как видно из рисунка, зона, где существуют локальные магнитные пробки, занимает при  $\delta \geq r/(NqR_0)$  почти весь объем плазменного шнура. При  $\delta \leq r/(NqR_0)$ , что типично для многих современных установок и установок с реакторными параметрами, локальные магнитные пробки существуют только в узкой полосе вблизи горизонтальной плоскости симметрии токамака. И лишь на внешней обводе тора ширина полосы сравнивается с малым радиусом (см. рис. 3, 6, 7). Глубина магнитных пробок зависит не только от параметров маг-

нитной системы, но и от параметров плазмы, а именно от формы и положения магнитных поверхностей и от значения вращательно-го преобразования  $q^{-1}$ . С увеличением тока плазмы и уменьшении  $q$  зона, в которой существуют локальные пробки, сужается. Исследование влияния  $q$  и вертикального смещения шнура на глубину магнитных пробок проведено, например, в [1].

Помимо глубины магнитных пробок, важными характеристиками магнитной ямы являются  $d^2B/dl^2$  в точке минимума  $\varphi_n$  и длина  $L$ . Используя те же приближения, что и при выводе формул (1.12), (1.14), эти величины можно выразить следующим образом [4]:

$$\left. \frac{d^2B}{dl^2} \right|_{\varphi_n} \approx B_0 \delta \frac{N^2}{R^2} \sqrt{1 - Y^2}; \quad (1.16)$$

$$L \approx 2R(\varphi_n - \varphi_x) \approx 4RN^{-1} \arccos Y. \quad (1.17)$$

Качественно поведение  $d^2B/dl^2$  и  $L$  на плоскости  $r, \vartheta$  похоже на поведение  $\Delta(r, \vartheta)$ . В частности, все эти величины обращаются в нуль на границе существования локальных магнитных пробок  $Y=1$  и достигают максимума в горизонтальной плоскости симметрии токамака.

## 1.2. Траектории частиц в гофрированном магнитном поле

Уравнения движения локально-захваченных частиц. Поскольку все частоты рассматриваемых в дальнейшем процессов значительно ниже циклотронных, а характерные масштабы значительно больше ларморовского радиуса, движение частиц можно рассматривать в дрейфовом приближении [5]. При этом движение частиц разбивается на сумму циклотронного вращения и движения ведущего центра. Скорость циклотронного вращения определяется из условия сохранения магнитного момента  $\mu = mv_{\perp}^2 / (2B)$  [6]. Сохранение магнитного момента и энергии позволяет сразу же найти скорость движения ведущего центра вдоль силовой линии магнитного поля:

$$v_{\parallel} = \sqrt{2/m} \sqrt{\omega - \mu B - e\Phi}, \quad (1.18)$$

где  $\omega$  — энергия частицы;  $m$  — масса;  $e$  — заряд;  $\Phi$  — потенциал электрического поля. Скорость дрейфа ведущего центра поперек силовых линий определяется выражением [7]

$$\mathbf{v}_{dr} = v_{\parallel} \omega_B^{-1} \nabla \times v_{\parallel} \mathbf{n}, \quad (1.19)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{B}/B$  — единичный вектор вдоль магнитного поля;  $\omega_B = eB/(mc)$  — циклотронная частота;  $c$  — скорость света.

Полную дрейфовую скорость (1.19) можно представить в виде суммы трех дрейфов. Это электрический дрейф

$$\mathbf{v}_E = c\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2, \quad (1.20)$$

где  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  — напряженность электростатического поля, торои-

дальный дрейф, который для запертых частиц приближенно сводится к диамагнитному дрейфу

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{e}_z (v^2 + v_{\parallel}^2) / (2\omega_B R) \approx \mathbf{e}_z \omega_k / (m\omega_B R), \quad (1.21)$$

и дрейф, обусловленный гофрировочной неоднородностью магнитного поля,

$$\mathbf{v}_r = v_d R n \cdot \nabla \delta \cos(N\varphi). \quad (1.22)$$

В типичных условиях не слишком высокой гофрировки скорость дрейфа  $v_r$  мала, поэтому далее ее учитывать не будем.

Продольное движение локально-запертых частиц представляет собой возвратно-поступательное движение между точками отражения в областях более слабого магнитного поля между тороидальными катушками. Оценим скорость этого движения. Поскольку потенциал электрического поля практически постоянен вдоль магнитного поля, локально-захваченными могут быть только частицы с  $\omega < \mu B_x + e\Phi$ . Их максимальная продольная скорость не превышает

$$v_{\parallel} \sim \sqrt{2/m} \sqrt{\mu B_x - \mu B_n} \sim v_{\perp} \sqrt{\Delta} \sim v \sqrt{\delta}, \quad (1.23)$$

а характерное время движения локально-запертой частицы между точками отражения можно оценить как

$$\tau_l \sim L/v_{\parallel} \sim R/(Nv\sqrt{\delta}). \quad (1.24)$$

Частота продольного движения по магнитной яме достаточно высока, так что за  $\tau_l$  частицы успевают продрейфовать лишь на

$$v_d \tau_l \sim \rho / (N\sqrt{\delta}) \sim \rho, \quad (1.25)$$

где  $\rho = v_{\perp} / \omega_B$  — ларморовский радиус. Это перемещение значительно меньше характерных размеров неоднородности, поэтому картину движения локально-запертых частиц можно упростить с помощью усреднения по быстрым осцилляциям между магнитными пробками. Проинтегрировав дрейфовую скорость (1.19) по времени, найдем смещение частиц за полный оборот по замкнутой орбите:

$$\left. \begin{aligned} \Delta r &= \oint \frac{e_r v_{dr}}{v_{\parallel}} dl \approx -\frac{1}{\omega_B} \frac{\partial J_l}{r \partial \vartheta}; \\ r \Delta \vartheta &= \oint \frac{e_{\vartheta} v_{dr}}{v_{\parallel}} dl \approx \frac{1}{\omega_B} \frac{\partial J_l}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

где  $J_l = \oint v_{\parallel} dl$  — продольный адиабатический инвариант для запертых частиц. Время движения по замкнутой орбите (1.24) также можно выразить через  $J_l$ :

$$\tau_l = \oint \frac{dl}{v_{\parallel}} = m \frac{\partial J_l}{\partial \omega} = -\frac{m}{B} \frac{\partial J_l}{\partial \mu}. \quad (1.27)$$



Используя выражения (1.26) и (1.27), среднюю скорость дрейфа локально-захваченных частиц или скорость ведущего центра орбиты можно записать в следующем виде [8]:

$$\mathbf{v}_{dr} = -\mathbf{n} \times \nabla J_l / \left( m\omega_B \frac{\partial J_l}{\partial w} \right). \quad (1.28)$$

Из этой формулы сразу видно, что  $J_l$  сохраняется на усредненной дрейфовой траектории.

Отметим, что для локально-захваченных частиц усреднение по периоду не изменяет дрейфовой скорости и дает лишь иное представление для  $v_{dr}$ . Это ясно из того, что  $v_d$  и  $v_E$  остаются практически постоянными в течение времени  $\tau_l$ . Следовательно, ведущий центр локально-запертой частицы движется с суммарной скоростью электрического и тороидального дрейфов.

**Траектории локально-захваченных частиц.** Рассмотрим сначала движение частиц без учета электрического поля. Такое приближение оправдано по крайней мере для частиц высоких энергий, для которых скорость тороидального дрейфа значительно превышает скорость электрического дрейфа. При  $\Phi=0$  отражение частиц от магнитных пробок ( $v_{\parallel}=0$ ) происходит в точках, лежащих на по-

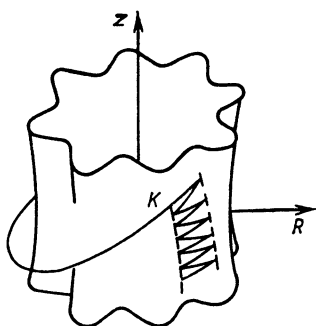
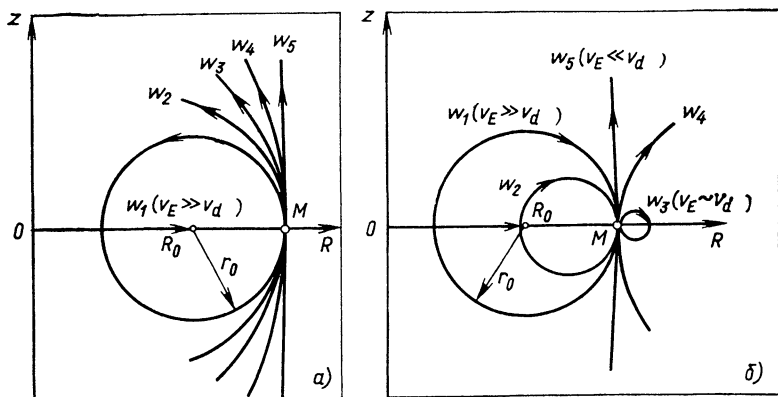


Рис. 12. Поверхность  $B=\text{const}$  и траектория локально-запертой частицы (в точке  $K$  траектория обрывается и локально-запертая частица превращается в банановую)

Рис. 13. Дрейфовые траектории локально-запертых частиц при различном соотношении электрического и тороидального дрейфов. Направления электрического и тороидального дрейфов совпадают (а), противоположны (б);  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_5$



верхности  $B(r, \vartheta, \varphi) = \omega/\mu = \text{const}$ . Эта поверхность в токамаке с учетом гофрировки изображена на рис. 12. Дрейф локально-запертых частиц вдоль поверхности  $B = \text{const}$  осуществляется согласно (1.27) по таким силовым линиям, на которых  $J_l = \text{const}$ . Пересечение семейства силовых линий  $J_l = \text{const}$  с поверхностью  $B = \text{const}$  изображено на рис. 12 пунктиром. Локально-запертые частицы осциллируют вблизи поверхности  $B = \text{const}$ , опираясь на нее в точках, лежащих на этих кривых.

Во многих случаях достаточно рассмотрения проекции траектории ведущего центра на плоскость  $r, \vartheta$ . Они представляют собой линии, близкие к вертикальным прямым. Слабое отличие от вертикали связано с полем тока  $B_p$  и гофрировкой тороидального поля. Без учета этих эффектов траектории представляют собой строго вертикальные прямые и не зависят от значения  $J_l$ .

Рассмотрим теперь влияние электрического поля на траектории локально-захваченных частиц. Как уже отмечалось, потенциал электрического поля в токамаке почти не зависит от  $l$ . Поэтому электрическое поле не влияет на продольное движение захваченных частиц. Однако траектории поперечного дрейфового движения существенно изменяются. Так, при  $v_E \gg v_d$  дрейфовая траектория локально-запертой частицы близка к эквипотенциали  $\Phi(r, \vartheta) = \text{const}$ , поэтому траектории замкнуты и не выходят из плазмы (рис. 13). При произвольных  $v_E$  и  $v_d$  локально-запертые частицы движутся по поверхностям

$$\mu B(r, \vartheta) + e\Phi(r, \vartheta) = \text{const}, \quad (1.29)$$

которые могут иметь довольно сложную форму.

Для качественного анализа поведения траекторий рассмотрим потенциал параболической формы  $\Phi(r) = -Er^2/(2r_0)$ , где  $E$  — напряженность радиального электрического поля при  $r = r_0$ . Тогда согласно (1.29) дрейфовые траектории будут окружностями с центрами, смещенными по горизонтали на  $\mu r_0 B_0 / (eER_0) = r_0 v_d / v_E$ , и радиусами  $r_0(1 + v_d/v_E)$ . Эти траектории изображены на рис. 13. Если в точке  $M$ , откуда выходят траектории, направления электрического и тороидального дрейфов совпадают, то по мере роста энергии или отношения  $v_d/v_E$  траектория плавно переходит от окружности, совпадающей с магнитной поверхностью, к вертикальной прямой (рис. 13, а). В случае, когда направления дрейфов в точке  $M$  противоположны, деформация орбиты с ростом  $\omega$  более сложная. Сначала радиус окружности уменьшается. При  $v_E = v_d$  траектория вырождается в точку, а затем при  $v_E < v_d$  центр окружности перемещается во внешнюю область шнура и окружность приближается к вертикальной прямой с внешней стороны.

**Траектории движения банановых частиц в гофрированном магнитном поле.** Рассмотрим сначала траектории движения банановых частиц в аксиально-симметричном случае. Эти траектории удовлетворяют дрейфовым уравнениям

$$\left. \begin{aligned} dr/dt &= v_d \sin \vartheta; \\ r d\vartheta/dt &= v_d \cos \vartheta + v_E + v_{\parallel}(r, \vartheta) B_p/B_0; \\ R d\varphi/dt &= v_{\parallel}(r, \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

В аксиально-симметричном случае зависимость  $r(\vartheta)$  можно найти, используя равенство

$$r = r_0 + v_{\parallel} \vartheta / \omega_J \quad (1.31)$$

( $\omega_J$  — циклотронная частота, определенная по напряженности поля тока  $B_p$ ), являющееся усредненным по циклотронному вращению законом сохранения тороидальной компоненты обобщенного момента импульса [9]:

$$M_{\varphi} = m v_{\parallel} R - R_0 (e/c) \int_0^r B_p dr. \quad (1.32)$$

Зависимость  $\varphi(\vartheta)$  определяется комбинацией двух последних уравнений (1.30). Разлагая  $v_{\parallel}(r, \vartheta)$  и  $q$  вблизи  $r_0$

$$\begin{aligned} v_{\parallel}(r, \vartheta) &\approx v_{\parallel}(r_0, \vartheta) - (v_E + v_d \cos \vartheta) B_0/B_p; \\ q &= q(r_0) + v_{\parallel} \omega_J^{-1} dq/dr \end{aligned}$$

и учитывая изменение  $r$  на траектории, приходим к уравнению для  $\varphi$  [10]:

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = q + \frac{dq}{dr} \frac{v_{\parallel}}{\omega_J} + \frac{q^2 (v_d \cos \vartheta + v_E)}{e v_{\parallel}}, \quad (1.33)$$

где все величины берутся при  $r=r_0$ . Подставляя в это уравнение конкретный вид зависимости  $v_{\parallel}(\vartheta)$ , получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\vartheta) &= \varphi_0 + q\vartheta + \frac{\partial q}{dr} \frac{vq}{\omega_B \sqrt{\varepsilon}} \int \sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_b} d\vartheta + \\ &+ \frac{q^2}{v\varepsilon^{3/2}} \int \frac{v_d \cos \vartheta + v_E}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_b}} d\vartheta, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где  $\vartheta_b = \arccos[(B_0 \mu / \omega_k - 1) / \varepsilon]$  — полоидальный угол точки отражения в аксиально-симметричном случае. Из этого уравнения, в частности, можно получить приращение  $\Delta\varphi$  за пролет между точками отражения (рис. 14):

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= \pm 2q\vartheta_b + \Delta\varphi_b; \\ \Delta\varphi_b &= \frac{2\sqrt{2} q^2 K}{v\varepsilon^{3/2}} \left[ -v_E + 2v_d \left( \frac{E}{K} - \frac{1}{2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2S \left( \frac{E}{K} - \cos^2 \frac{\vartheta_b}{2} \right) \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

где  $E = E(\sin(\vartheta_b/2))$  и  $K = K(\sin(\vartheta_b/2))$  — полные эллиптические интегралы;  $S = d \ln q / d \ln r$  — шир. Время движения банановой час-

тицы между последовательными отражениями можно найти непосредственно из уравнений (1.30). Без учета дрейфового движения

$$\tau_b = \int_{-\vartheta_b}^{\vartheta_b} \frac{Rq d\vartheta}{v_{\parallel}} = \frac{2\sqrt{2}qR}{v\sqrt{\varepsilon}} K\left(\sin \frac{\vartheta_b}{2}\right). \quad (1.36)$$

В аксиально-симметричном случае после полного оборота по банановой орбите частота возвращается в исходную точку по радиусу. Это является следствием сохранения обобщенного тороидального момента импульса  $M_{\varphi}$ . Из-за нарушения аксиальной симметрии банановая орбита получает смещение

$$D = \oint \frac{dr}{dt} dt = \oint v_d \sin \vartheta \frac{dl}{v_{\parallel}}, \quad (1.37)$$

которое возникает, во-первых, из-за искажения силовых линий полями  $\tilde{B}_r$  и  $\tilde{B}_v$  и, во-вторых, из-за модуляции  $v_{\parallel}$ . Сравним роль этих эффектов, оценивая изменение полоидальной скорости [4]. Приращение  $v_{\vartheta}$  в результате отклонения силовой линии на  $\tilde{B}_r R_0 / (NB_0)$  можно оценить как

$$\Delta v_{\vartheta} \sim v_{\vartheta} \frac{S}{r} \frac{B_r R_0}{B_0 N} \sim \frac{v_{\vartheta}}{N\varepsilon} \frac{\tilde{B}_r}{B_0}.$$

Модуляция продольной скорости на  $v^2 \tilde{B}_{\varphi} / (v_{\parallel} B_0)$  приводит к

$$\Delta v_{\vartheta} \sim \frac{r}{qR} \frac{v^2 \tilde{B}_{\varphi}}{v_{\parallel} B_0} \sim v_{\vartheta} \frac{v^2}{v_{\parallel}^2} \frac{\tilde{B}_{\varphi}}{B_0} \geq \frac{v_{\vartheta}}{\varepsilon} \frac{\tilde{B}_{\varphi}}{B_0}.$$

Из сравнения этих оценок видно, что роль отклонения силовых линий как минимум в  $N$  раз меньше, чем роль модуляции  $v_{\parallel}$ . Поэтому при вычислении  $D$  в дальнейшем будем учитывать гофрировку только в выражении для продольной скорости

$$v_{\parallel} = \sqrt{2\mu/m} \sqrt{B(\vartheta_b) - \bar{B} - \tilde{B}}, \quad (1.38)$$

а для  $v_d$  и  $dl$  сохраним их значения в аксиально-симметричном случае. Более аккуратное сравнение эффектов модуляции  $v_{\parallel}$  и отклонения силовых линий вследствие гофрировки проведено в § 3.2 при анализе бананово-дрейфовых уравнений.

Учитывая только модуляцию продольной скорости, смещение ведущего центра банановой орбиты, связанное с гофрировкой, можно представить в виде

$$D = v_d \sqrt{\frac{m}{2\mu}} \left[ \int \frac{\sin \vartheta dl}{\sqrt{B(\vartheta_b) - \bar{B} - \tilde{B}}} - \int \frac{\sin \vartheta dl}{\sqrt{B(\vartheta_b) - \bar{B}}} \right], \quad (1.39)$$

где интегрирование проводится по невозмущенной траектории  $\varphi = \varphi_0 + q\vartheta$ ,  $dl = R d\varphi$ . Вследствие быстрых осцилляций  $\tilde{B}$  вдоль си-

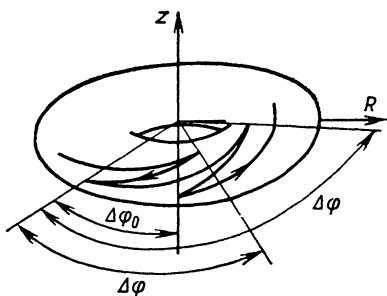


Рис. 14. Орбита банановой частицы

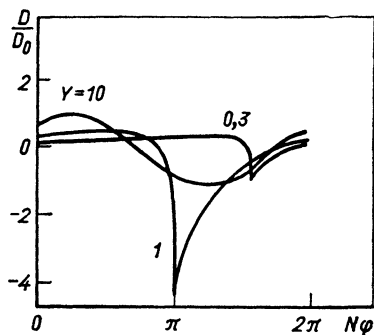


Рис. 15. Зависимость смещения банановой орбиты от полоидального угла в точке отражения  $\vartheta_b$  при различных значениях параметра  $Y = \varepsilon |\sin \vartheta_b| / (Nq\delta)$

ловой линии смещение  $D$  почти везде обращается в нуль, за исключением окрестностей точек отражения. Для вычисления  $D$  в окрестности этих точек можно воспользоваться разложением аксиально-симметричной составляющей магнитного поля  $\vec{B}(\vartheta) \approx \vec{B}(\vartheta_b) (1 + \varepsilon \sin \vartheta_b ((\vartheta - \vartheta_b)))$  и выразить  $D$  следующим образом:

$$D = D_0 Y \sqrt{\frac{Nq}{\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{\vartheta_b} (\vartheta_b - \vartheta)^{-1/2} d\vartheta - \int_{-\infty}^{\vartheta_1} \left( \vartheta_b - \vartheta - \frac{\sin(N\varphi)}{YNq} \right)^{-1/2} d\vartheta \right], \quad (1.40)$$

где  $D_0 = \rho\delta (q/\varepsilon)^{3/2} (\pi N / |\sin \vartheta_b|)^{1/2}$ ,  $Y = \varepsilon |\sin \vartheta_b| / (Nq\delta (\vartheta_b))$ .

Интегрирование во втором интеграле проводится до точки, в которой подынтегральное выражение обращается в нуль. Смещение  $D$  является периодической функцией аргумента  $N\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Зависимость  $D$  от  $N\varphi$ , полученная вычислением интеграла (1.40), представлена на рис. 15.

При слабой гофрировке в областях, где в точках отражения нет запертых частиц ( $Y \gg 1$ ), смещение можно вычислить аналитически. Представляя интегралы, в формуле (1.40) в виде производных по параметру  $Y^{-1}$ , записываем  $D$  в виде

$$D = - \frac{D_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(N\varphi - x)}{\sqrt{x}} dx = D_0 \sin\left(N\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right), \quad (1.41)$$

где знак минус берется при отражении в верхней полуплоскости ( $\vartheta_b > 0$ ), а плюс — в нижней. При  $Y \leq 1$  смещение можно оценить так:  $D \sim v_{d1} \sin \vartheta_b$ .

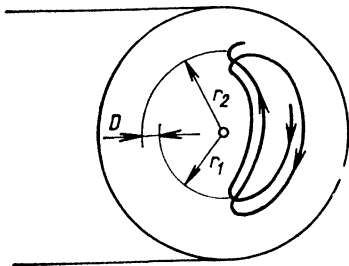


Рис. 16. Радиальное смещение банановой орбиты в токамаке с гофрировкой

впадающую с (1.41) при  $\epsilon |\sin \vartheta_b| \gg Nq\delta(\vartheta_b)$  и правильно описывающую поведение (1.40) при  $Y \leq 1$ . Подобная формула для смещения была получена в [11] из анализа адиабатического инварианта  $J_b$ .

**Движение ведущего центра банановой орбиты.** Движение банановой частицы в магнитном поле токамака с учетом гофрировки представляет собой движение по невозмущенной траектории (1.31), (1.34) между точками отражения и скачки по радиусу на расстояние  $D$  (1.40) в окрестностях точек отражения. Общий вид орбиты банановой частицы представлен на рис. 14, а ее проекция на плоскость  $r, \vartheta$  — на рис. 16. Отклонение банановых частиц от силовой линии на невозмущенной траектории (1.31), как известно, приводит к неоклассическому переносу [12] и для дальнейшего не представляет интереса. Чтобы исключить неоклассические процессы, рассмотрим движение ведущего центра банановой орбиты в координатах  $r_0, \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — тороидальный угол пересечения силовой линией горизонтальной плоскости симметрии токамака. Вычисленные выше приращения  $D$  (1.40) и  $\Delta\varphi_b$  (1.35) позволяют записать в траекторию ведущего центра в виде разностных уравнений [13]

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= r_0 + D(N\varphi_0 + Nq\vartheta_b); \\ \varphi_0 &= \varphi_0 + \Delta\varphi_b; \\ r_0 &= r_0 - D(-N\varphi_0 + Nq\vartheta_b); \\ \varphi_0 &= \varphi_0 + \Delta\varphi_b, \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

где первые два соотношения описывают отражение в верхней полуплоскости, а два последние — в нижней.

В общем случае траектория ведущего центра может иметь очень сложный вид. В частности, при больших  $D$  она становится неустойчивой и представляет собой броуновское движение по радиусу [13]. В предельном случае малых  $D$ , который реализуется для частиц с не слишком высокой энергией и, в частности, для тепловых частиц, разностные уравнения могут быть приближенно заменены дифференциальными. Введем два угла, обозначающих

В дальнейшем нас будет интересовать в основном случай невысокой гофрировки  $\delta \leq \epsilon/(Nq)$ , описываемой формулой (1.41). Выражение (1.41), однако, расходится при  $|\sin \vartheta_b| < Nq\delta/\epsilon$ . Чтобы устранить эту расходимость и качественно описать смещение при  $Y \leq 1$ , введем в (1.41) дополнительный множитель  $Y^{3/2}/(1+Y^{3/2})$  и получим общую формулу для смещения:

$$D = D_b \sin(N\varphi \pm \pi/4), \quad (1.42)$$

где  $D_b = \delta(\vartheta_b)\rho\sqrt{\pi Nq^3} |\sin \vartheta_b| \times$   
 $\times [(Nq\delta)^{3/2} + (\epsilon |\sin \vartheta_b|)^{3/2}]^{-1}$ , со-

фазу гофрировки в верхней и нижней точках отражения,

$$F_u = N\varphi_0 + Nq\vartheta_b; \quad F_d = -N\varphi_0 + Nq\vartheta_b. \quad (1.44)$$

Разностные уравнения для этих величин могут быть записаны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} F_u &= F_u - \Delta F(r) + \Delta F(r - D(F_d)) + 2\Delta\varphi_b; \\ F_d &= F_d - \Delta F(r) + \Delta F(r + D(F_u)) - 2\Delta\varphi_b, \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

где  $\Delta F(r) = 2Nq(r)\vartheta_b(r)$ . Разлагая приращение в ряд  $\Delta F(r+D) \approx \Delta F(r) + Dd\Delta F/dr$  и деля разностные уравнения (1.45) на время между последовательными отражениями  $\tau_b$ , получаем приближенные дифференциальные уравнения [14]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_u}{dt} &= -\frac{d\Delta F}{dr} \frac{D(F_d)}{\tau_b} + \frac{2\Delta\varphi_b N}{\tau_b}; \\ \frac{dF_d}{dt} &= \frac{d\Delta F}{dr} \frac{D(F_u)}{\tau_b} - \frac{2\Delta\varphi_b N}{\tau_b}. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

В тех же предположениях из (1.43) найдем уравнение для радиальной скорости

$$\frac{dr}{dt} = \frac{D(F_u) - D(F_d)}{2\tau_b}. \quad (1.47)$$

Комбинируя (1.46) с (1.47), можно сразу найти один интеграл приближенных дифференциальных уравнений

$$r = \int \frac{D(F_u) - D(F_d)}{2\tau_b} dt = (F_u + F_d) / \left( 2 \frac{d\Delta F}{dr} + \text{const} \right), \quad (1.48)$$

поэтому для нахождения зависимости  $r(t)$  достаточно решить уравнения (1.46) для  $F_u$  и  $F_d$ . Система (1.46) в силу автономности имеет интеграл

$$G_0(F_d) + G_0(F_u) = \text{const}, \quad (1.49)$$

$$\text{где } G_0 = \frac{1}{\tau_b} \frac{d\Delta F}{dr} \int D(x) dx - \frac{2N\Delta\varphi_b}{\tau_b} x.$$

Поскольку  $D(x)$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$ , переменную  $G_0$  можно представить в виде суммы периодической и линейной составляющих:

$$G_0(x) = G_1(x) + xG_2, \quad (1.50)$$

$$\text{где } G_2 = \frac{1}{2\pi\tau_b} \frac{d\Delta F}{dr} \int_0^{2\pi} D(x) dx - \frac{2N\Delta\varphi_b}{\tau_b}; \quad G_1(x) = G(x) - xG_2 - \text{периодическая}$$

функция  $G_1(x) = G_1(x+2\pi)$ . Используя интеграл (1.49), можно показать ограниченность изменений  $r(t)$  для уравнений (1.46), (1.47). Действительно, если  $G_2 = 0$ , то интеграл (1.49) ограничивает изменение  $F_u$  и  $F_d$  периодом  $2\pi$ . Поэтому согласно (1.48) отклонение  $r$  от начального значения не превышает

$2\pi(d\Delta F/dr)^{-1}$ . Если же  $G_2 \neq 0$ , то фазы  $F_d$  и  $F_u$  могут уходить на бесконечность. В этом случае интеграл (1.49) дает неявное уравнение для  $r$ :

$$G_1(F_d) + G_2 F_d + G_1 \left( 2r \frac{d\Delta F}{dr} - F_d \right) + G_2 \left( 2r \frac{d\Delta F}{dr} - F_d \right) = \text{const.} \quad (1.51)$$

Из этого уравнения можно получить оценку максимального отклонения:

$$\Delta r \leq \frac{\max |G_1|}{|G_2 d\Delta F/dr|}. \quad (1.52)$$

Таким образом, при  $D_0 d\Delta F/dr \ll 1$  и  $N\Delta\phi_b \ll 1$  ведущий центр банановой орбиты в гофрированном магнитном поле токамака совершает радиальные осцилляции с ограниченной амплитудой. При  $D_0 d\Delta F/dr \gg 1$  траектория ведущего центра неустойчива и довольно быстро покидает плазму. Вид траекторий при больших значениях параметра  $N\Delta\phi_b$  рассмотрен в приложении П4 при анализе резонансного переноса банановых частиц.

### 1.3. Бесстолкновительные переходы между банановыми и локально-запертыми частицами

**Бесстолкновительный выход из локальных пробок.** При определенных условиях траектория локально-запертой частицы может обрываться. Это явление называют бесстолкновительным выходом из локальных пробок; возникает оно, когда одна из силовых линий  $J_l = \text{const}$ , вдоль которых дрейфуют частицы, оказывается касательной поверхности  $B = \text{const}$ . Вблизи этих точек (точка  $K$  на рис. 12) время движения по локальной магнитной яме  $\tau_l$  сильно возрастает, и адиабатический инвариант  $J_l$  перестает сохраняться. При дальнейшем дрейфе частица выходит из локальной магнитной ямы, переходя на банановую траекторию (см. рис. 12).

Для определения точки выхода частиц из локальных пробок рассмотрим фазовый портрет траекторий (рис. 17). Отделенные сепаратрисами  $\omega_k = \mu B_x$  заштрихованные области соответствуют локально-запертым частицам. Другие области фазового пространства соответствуют подлетающим ( $v_{\parallel} > 0$ ) и отлетающим ( $v_{\parallel} < 0$ ) банановым частицам. Из-за дрейфового смещения поперек силовых линий фазовый портрет постепенно меняется. В частности, изменяется фазовый объем заштрихованных областей, занятых локально-запертыми частицами:

$$J_S(r, \vartheta) = \oint v_{\parallel} dl, \quad (1.53)$$

где интегрирование проводится по сепаратрисе, ограничивающей область существования запертых частиц  $\omega_k = \mu B_x$ . По теореме Лиувилля фазовый объем, ограниченный пучком траекторий, сохраняется. Поэтому, если при движении вдоль дрейфовой траектории  $J_S$  уменьшается, локально-запертые частицы по мере умень-



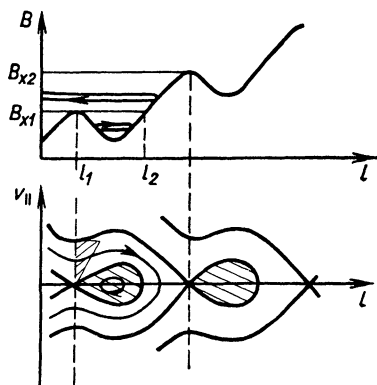


Рис. 17. Зависимость  $B(l)$  и фазовый портрет траекторий банановых и локально-захваченных частиц

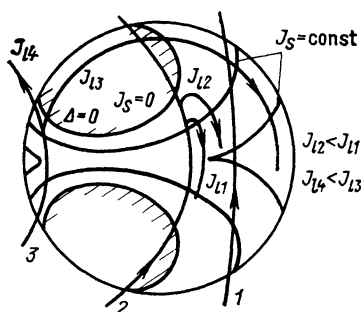


Рис. 18. Линии уровня  $J_S = \text{const}$  и траектории локально-захваченных частиц с учетом бесстолкновительного выхода из пробки:

1, 2 и 3 — дрейфовые траектории (1.29)

шения фазового объема под сепаратрисой будут выходить из локальных пробки, превращаясь в банановые. Этот переход будет происходить с неизбежностью, как только фазовый объем, ограниченный траекторией, или, что то же самое, адиабатический инвариант  $J_l$  (1.26) станет равен фазовому объему на сепаратрисе:

$$J_l = J_S(r, \vartheta). \quad (1.54)$$

На плоскости поперечного сечения шнура  $r, \vartheta$  точку выхода локально-захваченной частицы из пробки можно найти, построив зависимость  $J_S(r, \vartheta)$  (рис. 18). Линии уровня  $J_S = \text{const}$  практически совпадают с линиями  $\Delta = \text{const}$ . Как и глубина ям,  $J_S$  достигает максимума при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  и обращается в нуль на линии  $\Delta = 0$ .

С учетом бесстолкновительного выхода траектории локально-захваченных частиц имеют следующий вид. Сначала все частицы, вылетающие из одной точки, независимо от значения  $J_l$  движутся со скоростью  $v_E + v_d$  по общей дрейфовой траектории. Если вдоль этой траектории  $J_S$  (или  $\Delta$ ) не уменьшается, то движение будет продолжаться, пока частицы не выйдут из плазмы. Если же вдоль дрейфовой траектории  $J_S$  уменьшается, то, достигнув линии  $J_S = J_l$ , частица выйдет из захвата и далее будет двигаться по банановой траектории. При этом частица тем позже превратится в банановую, чем на большей глубине она находится в яме (меньше  $J_l$ ). Самыми последними вблизи границы  $\Delta = 0$  из захвата выйдут частицы, находящиеся у самого дна ямы (рис. 18).

**Бесстолкновительный захват в локальные магнитные пробки.** Существует и обратный процесс захвата банановых частиц в локальные магнитные пробки. Это явление возникает, если в точках отражения банановых частиц глубина магнитных пробки  $\Delta$

возрастает в направлении дрейфа. Естественно, захват возможен только при относительно высокой гофрировке ( $NqR_0\delta > z$ ), когда в точке отражения банановой частицы существуют локальные магнитные пробки. Захваченными могут оказаться только те частицы, которые пролетают слегка выше сепаратрисы  $\omega_b = \mu B_x$  (см. рис. 17). Остальные частицы просто отражаются от области высокого магнитного поля, сохраняя состояние банановой частицы. Из этих рассуждений видно, что захват банановых частиц в локальные пробки можно рассматривать как случайный процесс с вероятностью, соответствующей отношению доли захваченных частиц к количеству всех подлетающих частиц.

Долю захваченных частиц можно определить, вычислив возрастание  $B_x$  за время пролета над ямой частицы, близкой к сепаратрисе [4]. Но мы воспользуемся более общим методом, основанным на расчете изменения фазового объема, занятого частицами в разных состояниях [15]. Применительно к задаче о захвате банановых частиц в локальные магнитные пробки этот метод использовался, например, в [16].

Вероятность захвата определяется отношением скорости увеличения фазового объема локально-захваченных частиц  $dJ_S/dt$  к фазовому объему траекторий, подходящих к зоне отражения в единицу времени. Для вычисления этой величины рассмотрим область фазового пространства  $\Omega$ , ограниченную сепаратрисой  $B_{x2}$  и лежащую между двумя последовательными максимумами напряженности магнитного поля (вертикальные пунктирные прямые на рис. 17). Далее картина периодически повторяется, поэтому достаточно рассмотреть отражение в этой области фазового пространства. Фазовый объем траекторий, входящих в область  $\Omega$  в единицу времени, представляет собой площадь треугольника со сторонами  $v_x$  и  $v_x dt$  (см. рис. 17), где  $v_x$  — скорость частиц, летящих по сепаратрисе  $B_{x2}$  при пересечении границы области  $\Omega$ ,

$$dJ_i/dt = v_x^2/2. \quad (1.55)$$

Скорость  $v_x$  выражается через разность максимумов магнитного поля так:

$$v_x = v \sqrt{(B_{x2} - B_{x1})/B_{x1}} = v [2\pi\epsilon |\sin \vartheta_b| / (Nq)]^{1/2}.$$

Подстановка этого значения в формулу (1.55) приводит к следующему выражению для скорости фазового потока:

$$dJ_i/dt = \pi v^2 \epsilon |\sin \vartheta_b| / (Nq). \quad (1.56)$$

Фазовый объем области запертых частиц, ограниченный сепаратрисой  $B_{x1}$ , согласно (1.53) можно представить как

$$J_S = 2 \int_{l_1}^{l_2} \sqrt{\frac{2}{m} \mu (B_{x1} - B(l))} dl.$$

Разлагая напряженность магнитного поля вблизи точек отра-

жения  $B \approx B_0 [1 - \varepsilon \cos \vartheta_b + \varepsilon \sin \vartheta_b (l - l_1) / (qR + \delta \cos(Nl/R))]$ , представляем  $J_S$  в виде

$$J_S = \frac{2Rv\sqrt{\delta}}{N} \int_0^{x_0} u dx, \quad (1.57)$$

где  $u = [\sqrt{1 - Y^2} (1 - \cos x) - Y (x - \sin x)]^{1/2}$ .

Из этой формулы видно, что  $J_S$  есть функция параметров  $\delta$  и  $Y = \varepsilon |\sin \vartheta_b| / (Nq\delta)$ , поэтому  $dJ_S/dt$  можно выразить через скорость изменения этих параметров на траектории:

$$\frac{dJ_S}{dt} = \frac{Rv\sqrt{\delta}}{N} \left[ \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dt} \int_0^{x_0} u dx - \frac{dY}{dt} \int_0^{x_0} \frac{x}{u} dx \right]. \quad (1.58)$$

Используя соотношение  $\int_0^{x_0} u dx = (T(Y) - YP(Y))/2$ , где  $T(Y) =$

$$= \frac{2}{Y} \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{u} dx; \quad P(Y) = 2 \int_0^{x_0} \frac{x dx}{u},$$

перепишем выражение (1.58) в следующем виде:

$$\frac{dJ_S}{dt} = \frac{Rv}{2N\sqrt{\delta}} \left[ T \frac{d\delta}{dt} - P \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon |\sin \vartheta_b|}{Nq} \right) \right]. \quad (1.59)$$

Вероятность захвата банановых частиц в локальные магнитные пробки  $p$  может теперь быть представлена как отношение скорости изменения фазового объема (1.59) к скорости фазового потока (1.55):

$$p = \frac{dJ_S/dt}{dJ_i/dt} = \frac{R^2 q}{2\pi r v |\sin \vartheta_b| \sqrt{\delta}} \left[ T \frac{d\delta}{dt} - \frac{P}{NB_0} \frac{d}{dt} (B_p |\sin \vartheta_b|) \right]. \quad (1.60)$$

Как показано в [4], вероятность захвата (1.60) хорошо согласуется с вероятностью, рассчитанной численно с помощью интегрирования дрейфовых уравнений. В большинстве случаев отклонение не превышает 10%. Графики функций  $T(Y)$  и  $P(Y)$  приведены на рис. 19. Эти функции могут быть приближены следующими формулами:

$$T \approx \frac{4 \sqrt{1 - Y^2} \arccos Y}{\pi [\sqrt{1 - Y^2} - Y \arccos Y]^{1/2}}; \quad (1.61)$$

$$P \approx 8\pi \arccos Y. \quad (1.62)$$

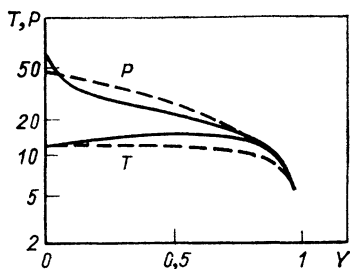


Рис. 19. Зависимости функций  $T$  и  $P$  от  $Y$  [пунктиром изображены приближенные значения (1.61) и (1.62)]

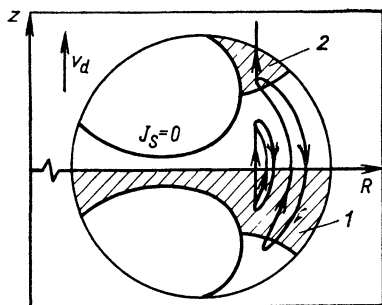


Рис. 20. Траектории частиц с учетом захвата в локальные пробки и бесстолкновительного выхода (заштрихованы области, в которых может происходить захват банановых частиц)

По сравнению с вероятностью, вычисленной в [4, 16], формула (1.60) учитывает электрический дрейф в радиальном поле, поэтому в (1.60) сохранена полная производная вдоль траектории  $d/dt = (\mathbf{v}_d + \mathbf{v}_E) \nabla$ . Без учета электрического дрейфа формула (1.60) полностью совпадает с выражением для  $p$ , полученным в [4].

Захват банановых частиц в локальные пробки возможен при  $p > 0$ . Условие  $p > 0$  определяет области в поперечном сечении шнура, в которых может происходить захват. Граница области захвата  $p = 0$  может быть найдена из уравнения

$$(\mathbf{v}_d + \mathbf{v}_E) \nabla J_S = 0, \quad (1.63)$$

физически означающего, что дрейфовые траектории параллельны линиям уровня  $J_S = \text{const}$ . Как видно из (1.63), область возможного захвата зависит от соотношения электрического и тороидального дрейфов, поэтому эта область различна для частиц с разной энергией. Области захвата для частиц высоких энергий, дрейфовые траектории которых являются практически вертикальными прямыми, на рис. 20 заштрихованы. В области 1 захват в локальные пробки не приводит к уходу частиц из системы. Продрейфовав по вертикальной траектории, локально-запертые частицы с неизбежностью вновь превратятся в банановые, причем в наиболее часто встречающемся случае вертикальной симметрии выход из захвата произойдет на той же магнитной поверхности, на которой произошел захват. В результате частица вернется на прежнюю банановую орбиту. Если же банановая частица превратится в локально-запертую в области 2, то она покинет установку. При изменении знака тороидального дрейфа области захвата и выхода из пробок меняются местами.

## 2. ТРАНСПОРТНЫЕ ПРОЦЕССЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЛОКАЛЬНО-ЗАПЕРТЫМИ ЧАСТИЦАМИ

### 2.1. Основные характеристики переноса локально-запертых частиц

Высокие частоты соударений. Радиальный перенос, связанный с локально-запертыми частицами, существенно зависит от того, успевают или не успевают запертые частицы пройти по всей дрейфовой траектории, прежде чем столкновения выведут их из локальных пробок. По этому критерию выделяются режимы высоких и низких частот соударений. Рассмотрим в первую очередь область высоких частот соударений. В этом случае время пребывания частицы в локальной магнитной яме

$$\tau_{\delta} \sim \nu^{-1} (v_{\parallel}/v)^2 \approx \delta/\nu, \quad (2.1)$$

где  $\nu$  — частота кулоновского рассеяния на угол  $\pi/2$ , значительно меньше времени движения частицы по дрейфовой траектории

$$\tau_d \sim \min\{r, NqR_{\delta}\} / |v_E + v_d|, \quad (2.2)$$

поэтому вид полной траектории независимо от того, замкнута она или выходит на стенку, не играет роли. Отклонение локально-запертой частицы от магнитной поверхности за время  $\tau_{\delta}$  составляет  $\Delta r \sim v_d \tau_{\delta}$  (электрический дрейф по эквипотенциалам почти не приводит к отклонению от магнитной поверхности). С учетом доли  $\sqrt{\delta}$ , занимаемой в фазовом пространстве запертыми частицами, коэффициент теплопроводности можно оценить как [17]

$$\chi^{TH} \sim \sqrt{\delta} (\Delta r)^2 / \tau_{\delta} \sim \sqrt{\delta} v_d^2 \tau_{\delta} \sim \delta^{3/2} v_T^4 / (R^2 \omega_B^2 \nu). \quad (2.3)$$

В работах [3, 18] отмечено, что выражение (2.3) применимо лишь при высокой гофрировке  $\delta \gg \epsilon / (Nq)$ . В случае  $\delta \leq \epsilon / (Nq)$ , который типичен для основной части плазменного шнура, за исключением периферии, необходимо учитывать геометрический фактор, возникающий из-за усреднения по полоидальному углу. При  $\delta \leq \epsilon / (Nq)$  локальные пробки существуют только в интервале полоидальных углов  $|\phi| < \phi_{m0} \sim Nq\delta_0/\epsilon$  и  $|\phi - \pi| < \phi_{m\pi} \sim Nq\delta_{\pi}/\epsilon$  (см. рис. 11), поэтому при интегрировании по магнитной поверхности появляется множитель  $\phi_m$ , учитывающий область существования магнитных пробок. Помимо этого, в области  $|\phi| < \phi_m$  отклонение от магнитной поверхности не превышает  $\Delta r \sim v_d \tau_{\delta} \phi_m$ , поэтому при  $\delta \leq \epsilon / (Nq)$  в оценку (2.3) должен быть введен дополнительный множитель  $\phi_m^2$ . Таким образом, в теплопроводности локально-захваченных частиц появляется формфактор  $G$ :

$$\chi^{TH} \sim G \delta^{3/2} v_T^4 / (R^2 \omega_B^2 \nu). \quad (2.4)$$

Значение множителя  $G$  не превышает единицы при  $\delta \geq \epsilon / (Nq)$  и уменьшается как  $\phi_m^3 \sim (Nq\delta/\epsilon)^3$  при  $\delta \leq \epsilon / (Nq)$  [18].

Дальнейшее уточнение формфактора  $G$  связано с учетом зависимости  $\delta(\theta)$  [19—21]. Из-за уменьшения  $\delta$  при отходе от горизонтальной плоскости симметрии токамака коэффициент  $G$ , а следовательно, и теплопроводность уменьшаются в 3—10 раз.

Отметим, что эффективное время соударений не должно быть слишком мало:

$$\tau_l \ll \tau_\delta \ll \tau_d, \quad (2.5)$$

чтобы частицы все-таки успевали несколько раз отразиться от пробок, прежде чем они выйдут из захвата вследствие столкновений. В противном случае уже нельзя проводить усреднение по орбите локально-запертой частицы и приведенные выше оценки становятся несправедливыми.

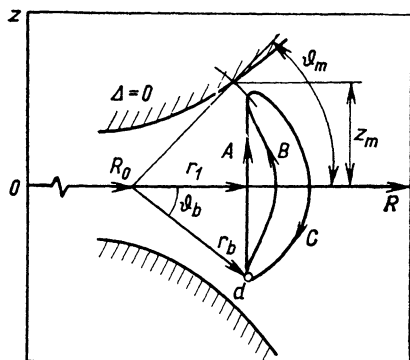
При приближении к верхней по частоте столкновений границе гофрировочного переноса ( $\tau_\delta \sim \tau_l$ ) необходимо учитывать роль пограничного слоя, отделяющего локально-запертые частицы от остальных областей фазового пространства [22]. Если следовать рассуждениям, приведшим к оценкам (2.3), (2.4), то в области пограничного слоя должен быть излом функции распределения. Из-за дифференциального характера кулоновского оператора столкновений этот излом сглаживается, размазываясь в фазовом пространстве на ширину  $\Delta v \sim v \sqrt{\delta} \sqrt{\tau_l/\tau_\delta}$ . В результате к (2.4) добавляется вклад от пограничного слоя, и полная теплопроводность оценивается так:

$$\chi^{TH} \sim G(1 + (\tau_l/\tau_\delta)^{1/2}) \delta^{3/2} v^4 / (R^2 \omega_B^2 v). \quad (2.6)$$

При  $\tau_l > \tau_\delta$  ширина пограничного слоя  $v \sqrt{\delta} \sqrt{\tau_l/\tau_\delta}$  становится больше ширины области, занятой локально-запертыми частицами. Поэтому искажение функции распределения в области локально-запертых частиц по мере роста  $\tau_l/\tau_\delta$  уменьшается, полностью исчезая в пределе  $\tau_l \gg \tau_\delta$ .

**Низкие частоты соударений.** Рассмотрим теперь область низких частот соударений  $\tau_d \ll \tau_\delta$ . В этом случае тип и значение коэффициента транспортного переноса в значительной степени определяются видом траектории частицы. Так, если  $\delta \geq \varepsilon/(Nq)$ , то локально-запертые частицы могут либо выходить на стенку камеры, либо перемещаться по радиусу на размеры, сравнимые с малым радиусом тора (траектории  $I$  на рис. 18). При таких больших перемещениях существенными становятся искажения максвелловского распределения, и перенос имеет конвективный характер. Рассмотрению этих процессов посвящен обзор А. В. Гуревича и Я. С. Диманта в данном сборнике. В настоящем обзоре мы ограничимся рассмотрением только таких случаев, когда все локально-запертые частицы хорошо удерживаются системой. При этом отклонение орбит от магнитной поверхности мало, а транспортные процессы носят диффузионный характер. В частности, не будем рассматривать случай большого радиального электрического поля

Рис. 21. Проекция траектории запертой частицы на поперечное сечение токамака. В точке  $d$  в этой проекции происходит разделение банановой орбиты  $C$ , может с вероятностью  $p$  (1.60) превратиться в локально-запертую (ветвь  $A$ ) или с вероятностью  $1-p$  остаться банановой (ветвь  $B$ )



$v_E \gg v_d$  при  $\delta > \epsilon / (Nq)$ . Для большинства локально-запертых частиц в этих условиях отклонение от магнитной поверхности действительно невелико ( $\Delta r \sim r v_d / v_E$ , см. рис. 13). Но для надтепловых частиц с энергией  $\omega_k \geq TR/r$  (считается, что потенциал плазмы близок к температуре  $e\Phi \sim T$ ) отклонения сравнимы с малым радиусом. Даже эта небольшая доля надтепловых частиц, переносимых конвективно, дает значительный вклад в транспортные процессы, и поэтому надежность данных, полученных в пределе  $v_E \gg v_d$  [11], очень низка.

Малость отклонения от магнитной поверхности для всех типов траекторий (см. рис. 13) реализуется лишь при  $\delta \leq \epsilon / (Nq)$ , когда, продрейфовав на расстояние не более

$$z_m = z \sin \vartheta_m \approx NqR\delta \leq r, \quad (2.7)$$

локально-запертые частицы выходят из магнитных пробок, превращаясь в банановые. Поэтому для низких частот соударений будем рассматривать только случай узкой зоны существования пробок ( $\delta \leq \epsilon / (Nq)$ ). Проекция траектории локально-запертой частицы на плоскость  $r, \varphi$ , включающая участки прохода по банановой орбите, имеет в этих условиях вид, изображенный на рис. 21. На участке  $A$  частица движется по дрейфовой орбите в локальной пробке, а на участках  $B$  и  $C$  — по банановой орбите. Точка  $d$  в этой проекции представляет собой точку ветвления, в которой частица, движущаяся по участку банановой орбиты  $C$ , может отразиться, сохранив свое состояние ( $B$ ), или перейти на дрейфовую орбиту локально-захваченной частицы ( $A$ ).

Оценим теплопроводность в режиме низких частот соударений. Размер орбиты в пренебрежении электрическим дрейфом не превышает  $\Delta r \sim r \vartheta_m^2 \sim r (Nq\delta/\epsilon)^2$ . Эффективная частота соударений составляет  $\nu (v/\Delta v)^2$ , где  $\Delta v/v$  — доля фазового пространства, занятого частицами в заданном состоянии. Поэтому коэффициент теплопроводности с учетом усреднения по полоидальному углу можно оценить так:

$$\chi^{TL} \sim \frac{\Delta v}{v} \vartheta_m \nu \left( \frac{v}{\Delta v} \right)^2 \Delta r^2 \sim \frac{v}{\Delta v} \nu r^2 \left( \frac{Nq\delta}{\epsilon} \right)^5. \quad (2.8)$$

Значение  $\Delta v$  различно на разных участках орбиты. На участке  $A$   $\Delta v_A \sim v\sqrt{\delta}$ , а на участках  $B$  и  $C$   $\Delta v_B \sim v\sqrt{\varepsilon} \delta_m \sim vNq\delta/\sqrt{\varepsilon}$ . В [23, 24] учитывалась только часть орбиты, соответствующая локально-запертым частицам, что привело к оценке

$$\chi^{TL} \sim vr^2 N^5 q^5 \delta^{9/2} / \varepsilon^5. \quad (2.9)$$

В [25, 26] были рассмотрены оба предельных случая, при этом в пределе, противоположном (2.9), было получено [26]

$$\chi^{TL} \sim vr^2 N^4 q^4 \delta^4 / \varepsilon^{9/2}. \quad (2.10)$$

Граница применимости формул вида (2.9) и (2.10) зависит от отношения  $\Delta v_A$  и  $\Delta v_B$ . Транспортные процессы определяются тем участком траектории, который занимает больший объем в пространстве скоростей и дает соответственно меньший перенос [27]. Поэтому в общем случае коэффициент теплопроводности определяется меньшей из величин (2.9), (2.10):

$$\chi^{TL} \sim \frac{v}{\Delta v_A + \Delta v_B} vr^2 \left( \frac{Nq\delta}{\varepsilon} \right)^5. \quad (2.11)$$

Этот вывод обосновывается следующим образом. На том участке траектории, где оператор столкновений более эффективен, функция распределения слабо отличается от максвелловской. Поэтому вклад в перенос дает другой участок орбиты, где столкновения менее эффективны. Эффективность столкновений определяется величиной  $\tau v (v/\Delta v)^2$ , где  $\tau$  — время пребывания частицы на заданном участке орбиты. Для участка  $A$ , соответствующего движению по дрейфовой траектории локально-захваченной частицы,  $\tau_A \sim \tau_d \sim NqR\delta/(v_d)$  (2.2). Время нахождения частицы на участках  $B$  и  $C$  из-за многократных отражений в  $\rho^{-1}$  раз больше  $\tau_b$ :

$$\tau_B \sim \tau_b/\rho \sim N^2 q^2 \delta^{3/2} R / (\varepsilon^{1/2} v_d).$$

С учетом ширины зоны, занимаемой каждым из участков орбиты в пространстве скоростей, отношение эффективности оператора столкновений на участках  $A$  и  $B$  можно оценить как

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} \left( \frac{\Delta v_B}{\Delta v_A} \right)^2 \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}} \frac{1}{Nq} \left( \frac{Nq\sqrt{\delta}}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^2 = Nq \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}} \sim \frac{\Delta v_B}{\Delta v_A}. \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что при  $\Delta v_B > \Delta v_A$  эффективность оператора столкновений в области  $A$  больше, а перенос определяется зоной  $B$ , и наоборот. Совпадение оценок эффективности соударений  $(\tau_A/\tau_B) (\Delta v_B/\Delta v_A)^2$  и отношения фазовых объемов  $\Delta v_B/\Delta v_A$  (2.12) не случайно. Это общее свойство случайных процессов, для которых время пребывания в некоторой области фазового пространства пропорционально фазовому объему.

Количественный анализ, проведенный в [27], показал, что переход от коэффициента теплопроводности (2.9) к (2.10) происходит при  $Nq(\delta/\varepsilon)^{1/2} \sim 6$ . В рассматриваемом случае относительно



низкой гофрировки ( $\delta \leq \varepsilon/(Nq)$ ) параметр  $Nq(\delta/\varepsilon)^{1/2} \leq \sqrt{Nq} \leq 6$ , поэтому практически реализуется лишь теплопроводность (2.9). Транспортные процессы с коэффициентом (2.10) могли бы происходить при  $\delta \geq \varepsilon/(Nq)$ . Однако при этом перенос становится конвективным и диффузионное приближение неприменимо. Отметим, кстати, что в [26] при оценке эффективности соударений был опущен множитель  $(\Delta v_B/\Delta v_A)^2$ . Из-за этого области применимости выражений (2.9) и (2.10) оказались прямо противоположными (2.12).

Электрическое поле изменяет дрейфовые траектории локально-запертых частиц и влияет поэтому на теплопроводность в области низких частот соударений. Анализ дрейфовых траекторий, проведенный в § 1.2, позволяет оценить поперечный размер орбиты как  $\Delta r \sim r\vartheta_m v/|v_E + v_d|$ . Если в рассматриваемой области  $v_E$  и  $v_d$  имеют разные знаки, то для частиц с  $v_E \sim v_d$  размер орбит может быть очень большим. Как видно из рис. 13, максимальное радиальное смещение локально-запертых частиц при  $\delta \leq \varepsilon/(Nq)$  не превышает  $r\vartheta_m$ , поскольку радиус окружности не может быть больше ширины зоны существования пробок. Поэтому в общем случае размер орбиты можно оценить как

$$\Delta r \sim r\vartheta_m v_d / (|v_E + v_d| + \vartheta_m v_d). \quad (2.13)$$

Учитывая то, что область, занимаемая локально-запертыми частицами, не изменяется под действием электрического поля, получаем вместо оценки (2.9) следующее выражение для коэффициента теплопроводности [23]:

$$\chi^{TL} \sim \nu r^2 \frac{N^5 q^5 \delta^{5/2}}{\varepsilon^5} \left( \frac{v_d}{|v_E + v_d| + v_d N q \delta / \varepsilon} \right)^2. \quad (2.14)$$

Значение (2.14) может быть как больше, так и меньше (2.9). Следует к тому же учитывать, что если, например, на внешнем обводе тора знаки  $v_E$  и  $v_d$  совпадают и значение коэффициента теплопроводности уменьшается по сравнению с (2.9), то на внутреннем обводе, наоборот, знаки  $v_E$  и  $v_d$  различны и коэффициент теплопроводности возрастает. Необходимо отметить, что и в присутствии радиального электрического поля рассуждения относительно областей применимости оценок (2.9) и (2.10) остаются в силе, поскольку области в пространстве скоростей, занимаемые участками траектории  $A$  и  $B$ , не изменяются.

**Роль переноса локально-запертых частиц.** Переход от режима низких к режиму высоких частот соударений происходит при условии, что кулоновские столкновения успевают вывести частицы из области фазового пространства  $\Delta v$ , определяющей перенос, за время  $\tau$  пребывания частиц в этой области. При  $\tau \nu (v/\Delta v)^2 > 1$  теплопроводность растет с уменьшением частоты соударений обратно пропорционально  $\nu$  (2.4). При  $\tau \nu (v/\Delta v)^2 \sim 1$   $\chi^{RT}$  достигает максимума и при дальнейшем уменьшении частоты падает пропорционально  $\nu$  (рис. 22). Более строго, с точностью до числового коэффициента

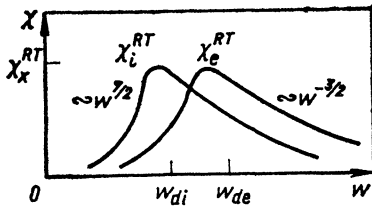


Рис. 22. Зависимость коэффициента переноса локально-захваченных частиц от энергии

ента, границу режимов высокой и низкой частоты соударений можно найти, приравнявая значения асимптотических коэффициентов теплопроводности  $\chi^{TL}$  и  $\chi^{TH}$ . В пределе не слишком высокой гофрировки ( $\delta \leq \epsilon / (Nq)$ ) переход происходит при [23]

$$v_i \sim \delta / \tau_d \sim 7v_d / (NqR) \quad \text{или} \quad T \approx \omega_d / 2, \quad (2.15)$$

где  $\omega_d = (T^{3/2} v_i m \omega_B R^2 q N)^{2/5}$ . Максимальный коэффициент теплопроводности  $\chi_x^{RT}$ , достигаемый при кулоновской частоте соударений (2.15), можно оценить следующим образом:

$$\chi_x^{RT} \sim \left( \frac{Nq\delta}{\epsilon} \right)^4 \frac{r \sqrt{\delta}}{7} v_d. \quad (2.16)$$

Максимальный коэффициент теплопроводности локально-захваченных частиц (2.16) одинаков для электронов и ионов, но достигается этот максимум при разных температурах. Температура перехода от (2.4) к (2.9) для ионов в установках с реакторными параметрами ( $n \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $R \approx 5 \text{ м}$ ,  $B \sim 5 \text{ Тл}$ ) составляет  $T_i \sim 10 \text{ кэВ}$ . Для электронов эта температура в  $(m_i/m_e)^{1/5}$  раз больше, т. е.  $T_e \approx 50 \text{ кэВ}$ . Поэтому типично электронная теплопроводность определяется асимптотическим коэффициентом  $\chi^{TH}$  (2.4), а ионная — некоторым переходным выражением от (2.4) к (2.9). В этих условиях электронная теплопроводность приблизительно в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз меньше ионной, поэтому она не играет существенной роли в энергобалансе плазмы реактора. В дальнейшем расчеты будем проводить только для ионной компоненты плазмы. Оценки электронного теплопереноса можно сделать, учитывая, что в режиме высоких частот соударений ( $T \leq \omega_{de}$ ) он в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз меньше ионного, а при низких частотах соударений ( $T \geq \omega_{de}$ ) — в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз больше.

Оценим роль переноса тепла локально-захваченными ионами в энергобалансе плазмы. Для этой цели удобно сравнить гофрировочную теплопроводность  $\chi^{TL}$  (2.9) с неоклассической ионной теплопроводностью в банановом режиме  $\chi^{NB} \nu \rho^2 q^2 / \epsilon^{3/2}$  [12]:

$$\frac{\chi^{TL}}{\chi^{NB}} \sim \frac{\nu r^2}{\sqrt{\delta}} \left( \frac{Nq\delta}{\epsilon} \right)^5 / \frac{\nu \rho^2 q^2}{\epsilon^{3/2}} \sim \frac{r^2 \epsilon^{3/2}}{q^2 \rho^2 \sqrt{\delta}} \left( \frac{Nq\delta}{\epsilon} \right)^5 \sim 2 \cdot 10^4 \left( \frac{Nq\delta}{\epsilon} \right)^5. \quad (2.17)$$

Для оценки здесь использованы следующие параметры:  $B \approx 5 \text{ Тл}$ ;

$T \approx 10$  кэВ;  $r \approx 80$  см;  $q \approx 1,5$ ;  $R \approx 5$  м;  $\delta \approx 0,3$  %. Отсюда видно, что гофрировочная теплопроводность становится сравнимой с банановой неоклассической теплопроводностью при  $Nq\delta/\varepsilon \sim 0,15$ . Поэтому условие малости гофрировочных потерь тепла по сравнению с неоклассическими накладывает очень жесткие ограничения на гофрировку реактора-токамака:  $\delta \leq 0,15 \varepsilon / (Nq)$ . В действительности это требование может оказаться завышенным, и достаточно малости гофрировочной теплопроводности по сравнению с ионным коэффициентом «продолженное плато»  $\chi^{NP} \sim \rho^2 qv/R$ . Тогда, сравнивая  $\chi_x^{RT}$  (2.16) с  $\chi_x^{NP}$ , имеем

$$\frac{\chi_x^{RT}}{\chi_x^{NP}} \sim \left( \frac{Nq\delta}{\varepsilon} \right)^4 \frac{r \sqrt{\delta} v^2}{7\omega_B R} \Big/ \frac{v \rho^2 q}{R} \sim \frac{R \sqrt{\delta}}{7q\rho} \left( \frac{Nq\delta}{\varepsilon} \right)^4 \sim \left( \frac{Nq\delta}{\varepsilon} \right)^4. \quad (2.18)$$

Здесь использованы те же параметры, что и в оценке (2.17). Малость гофрировочных потерь при такой оценке дает значительно менее жесткое ограничение на глубину гофрировки

$$\delta < \varepsilon / (Nq), \quad (2.19)$$

которое может быть удовлетворено практически по всему сечению шнура.

В обеих оценках гофрировочных потерь, (2.17) и (2.18), важную роль играет геометрический параметр

$$\alpha = \varepsilon / (Nq\delta_0), \quad (2.20)$$

где  $\delta_0(r) = \delta(r, 0)$  — гофрировка в горизонтальной плоскости симметрии тора. Фактически это наиболее существенный параметр, накладывающий ограничение на конструкцию магнитной системы, связанное с гофрировочными потерями. Требование разумной ограниченности потерь приводит к условию (2.19) в основной части шнура. Поэтому в дальнейших количественных расчетах будем уделять основное внимание диапазону  $0,1 \leq Nq\delta/\varepsilon \leq 1$ .

## 2.2. Потoki локально-запертых частиц в режиме высоких частот соударений

**Решение кинетического уравнения.** Рассмотрим перенос запертых частиц в условиях  $\tau_i \ll \tau_\delta \ll \tau_d$ . Первое неравенство позволяет использовать для вычисления потоков кинетическое уравнение, усредненное по быстрым осцилляциям между локальными магнитными пробками [28]:

$$\mathbf{v}_d \nabla f = \frac{1}{\tau_i} \oint \frac{St(f)}{v_{\parallel}} dl. \quad (2.21)$$

В левой части этого уравнения использована дрейфовая скорость ведущего центра ларморовской окружности (1.19), поскольку в токамаке скорость ведущего центра локально-захваченной частицы практически совпадает с  $v_d$  (см. § 1.2). Локально-захва-

ченные частицы занимают узкую область в пространстве скоростей  $|v_{\parallel}/v| \leq \sqrt{\delta}$ , поэтому в операторе столкновений достаточно сохранить только член, описывающий рассеяние по углам [18]:

$$\text{St}(f) = \frac{v_i(v)}{2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) = \frac{v_i(v) v_{\parallel} m}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( v_{\parallel} \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right), \quad (2.22)$$

где  $v_i(v) = \sum v_{ik}(v)$ ;  $v_{ik}(v)$  — частота столкновений ионов с частицами сорта  $k$ . Для максвелловского распределения [29]

$$v_{ik}(v) = \frac{4\pi n_k e_i^2 e_k^2 \lambda}{m_i^2 v^3} C \left( \frac{v}{v_{Tk}} \right) = \frac{3 \sqrt{2\pi}}{4} v_i \left( \frac{v_{TK}}{v} \right)^3 C \left( \frac{v}{v_{Tk}} \right), \quad (2.23)$$

где  $C(x) = \left( 1 - \frac{1}{2x^2} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du + \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi} x}$ ;

$v_i = 4\sqrt{\pi} n e^4 \lambda / (3m^{1/2} T^{3/2})$  — частота ион-ионных соударений;  $\lambda$  — кулоновский логарифм;  $v_{Tk} = \sqrt{2T/m_k}$  — тепловая скорость частиц сорта  $k$ . В большинстве случаев мы будем ограничиваться только учетом столкновений между основными ионами плазмы  $v_i(v) = v_{ii}(v)$ . Столкновения ионов с электронами практически всегда несущественны, а учет тяжелых ( $M \gg m_i$ ) примесей с зарядом  $Z$  может быть приближенно сделан введением дополнительного множителя в частоту соударений:

$$v_i(v) = v_{ii}(v) \left( 1 + \sqrt{2} Z \frac{Z_{\text{ef}} - 1}{Z - Z_{\text{ef}}} \right), \quad (2.24)$$

где  $Z_{\text{ef}}$  — эффективный заряд плазмы.

После интегрирования оператора столкновений по  $l$  кинетическое уравнение (2.21) принимает вид

$$v_{\text{dr}} \nabla f = - \frac{v_i(v)}{\partial J_l / \partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( J_l \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right). \quad (2.25)$$

Здесь  $\tau_l$  выражено через  $J_l$  (1.27). Это уравнение решается методом разложения по параметру  $\tau_{\delta}/\tau_d$ . В нулевом приближении

$$\partial f_0 / \partial \mu = 0 \quad (2.26)$$

и  $f_0$  выбирается в виде максвелловской функции распределения

$$f_0 = f_m \equiv \frac{n(r)}{\pi^{3/2} v_T^3} \exp \left( - \frac{v^2}{v_T^2} \right). \quad (2.27)$$

В первом приближении

$$- \frac{v_d \sin \vartheta}{v_i(v)} \frac{df_m}{dr} \frac{dJ_l}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( J_l \mu \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \right), \quad (2.28)$$

где  $f_1 = f - f_m$  — поправка к максвелловскому распределению, оп-

ределенная в области существования локально-запертых частиц

$$\omega_k/B_x \leq \mu \leq \omega_k/B_n, \quad (2.29)$$

где  $\omega_k = \omega - e\Phi$  — кинетическая энергия частиц.

Граничными условиями для уравнения (2.28) являются  $f_1 = 0$  на левой границе (сепаратриса, разделяющая банановые и локально-запертые частицы) и ограниченность  $f_1$  на правой. С учетом слабой зависимости  $v_d$  от  $\mu$  в узкой области (2.29) уравнение (2.28) легко интегрируется

$$f_1 = \frac{v_d \sin \theta}{v_i(v)} \frac{df_m}{dr} \left( 1 - \frac{\mu B_x}{\omega_k} \right). \quad (2.30)$$

Здесь  $\sin \theta$  появляется из-за проектирования вертикальной дрейфовой скорости  $v_d = \omega_k / (m\omega_B R)$  на радиальное направление. Таким образом, решение уравнения (2.25) представляет собой сумму максвелловской функции  $f_m$  (2.27) и добавки  $f_1$ , определенной для области запертых частиц выражением (2.30) и равной нулю при  $\mu < \omega_k/B_x$ . Нетрудно видеть, что у полученного решения производная  $\partial f / \partial \mu$  разрывна на сепаратрисе. Оператор столкновений (2.22), вообще говоря, таких разрывов не допускает. Возникновение разрыва связано с предположением  $\tau_l/\tau_\delta \rightarrow 0$ , не выполняющимся вблизи сепаратрисы. В действительности в узкой полосе  $\Delta\mu \leq (\tau_l/\tau_\delta)^{1/2} \Delta\omega_k/B_0$ , где  $\Delta$  — глубина локальных пробок (1.14), приведенное выше решение несправедливо. В этой полосе образуется переходный слой, позволяющий плавно сшить решение уравнения (2.25) для запертых частиц с максвелловской функцией распределения банановых частиц [22]. Из-за существования переходного слоя в решении (2.30) появляется добавка, пропорциональная  $(\tau_l/\tau_\delta)^{1/2}$ . Роль этой добавки обсуждается в приложении П2.

**Вычисление потоков.** Усредненные по магнитной поверхности потоки частиц и тепла определяются выражениями

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ Q \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \int_0^\infty 4\pi v dv \int_{\omega_k/B_x}^{\omega_k/B} \frac{B f_1 v_d \sin \theta}{m v_{\parallel}} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \end{bmatrix} d\mu, \quad (2.31)$$

где  $\theta$  и  $\psi$  — полоидальный и тороидальный углы, а  $f_1$  — поправка к максвелловской функции распределения. Поскольку  $f_1$  уже усреднена по локальной пробке и от  $\psi$  не зависит, выражения для потоков (2.31) могут быть сразу проинтегрированы по  $\psi$ :

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ Q \end{bmatrix} = - \int_0^\infty \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \end{bmatrix} v_d v dv \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{2\pi} \int_{\omega_k/B_x}^{\omega_k/B_n} f_1 \frac{N}{R} \frac{\partial J_1}{\partial \mu} d\mu. \quad (2.32)$$

Подставляя сюда  $f_1$  (2.30) и

$$\frac{df_m}{dr} = f_m \left[ \frac{d \ln f_{m0}}{dr} + \frac{\omega_k}{T} \frac{d \ln T}{dr} \right],$$

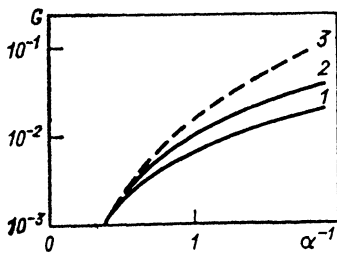


Рис. 23. Зависимость геометрического коэффициента  $G$  (2.36) от параметра  $\alpha^{-1} = Nq\delta/\epsilon$  при  $\delta(\vartheta) = \delta_0 \exp(-\vartheta^2)$  (1) и  $\delta(\vartheta) = \delta_0 \exp(-0.5\vartheta^2)$  (2); 3 — асимптотическая зависимость (2.38)

$$\text{где } \frac{d \ln f_{m0}}{dr} = \frac{1}{f_m} \frac{df_m}{dr} \Big|_{\omega_k=0} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e d\Phi}{dr} - \frac{3}{2T} \frac{dT}{dr},$$

после интегрирования по  $\mu$  получаем:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\Gamma}{Q/T} \right] = & -A_1 \left( \frac{cT}{eBR} \right)^2 \frac{n}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{U} \frac{\exp(-U) U^{3/2}}{v_i(\sqrt{U})} \right] \times \\ & \times \left[ \frac{d \ln f_{m0}}{dr} + U \frac{d \ln T}{dr} \right] dU. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Здесь  $U = \omega_k/T$ , а множитель  $A_1$  определяется геометрией пробок:

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{1}{2\pi^{3/2}} \frac{N}{R\mu\nu} \int_0^{2\pi} d\vartheta \sin^2 \vartheta \int_{\omega_k/B_x}^{\omega_k/B_n} J_1 d\mu = \\ = & \frac{2N}{3\pi^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\vartheta \sin^2 \vartheta \int_{\varphi_x}^{\varphi_{x1}} \left( 1 - \frac{B(\varphi)}{B_x} \right)^{3/2} d\varphi, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где  $\varphi_x$  и  $\varphi_{x1}$  — тороидальные углы, при которых  $B(\varphi) = B_x$  (см. рис. 10).

Длительное время уточнение потоков локально-запертых частиц в режиме высоких частот соударений было связано с более аккуратным вычислением геометрического коэффициента  $A_1$ . В первой работе [17] считалось, что глубина ямы  $\Delta = 2\delta$  на всей магнитной поверхности. Это приводило к максимальной оценке

$$A_{1x} = (128/9) (\delta/2\pi)^{3/2}. \quad (2.35)$$

В [3] коэффициент  $A_1$  вычислен с учетом глубины ямы (1.14), а в [18], помимо этого, и с учетом реальной длины ямы, приближенно определяемой выражением (1.17). Позже в [19—21] вычисления  $A_1$  были проведены для реального распределения гофрировки по сечению шнура  $\delta(r, \vartheta)$ . В итоге зависимость  $A_1$  от параметра  $\alpha = \epsilon/(Nq\delta)$  оказалась довольно сложной. Типичные зависи-

$$G = A_1/A_{1x} \quad (2.36)$$

от  $\alpha^{-1}$  изображены на рис. 23.

При  $\alpha \leq 1$  (большая гофрировка)  $G$  не удается аппроксимировать какой-либо простой формулой, поскольку существенной становится зависимость глубины гофрировки от полоидального угла  $\delta(\vartheta)$ , которая различна для разных установок. Поэтому при  $\alpha \leq 1$  геометрический коэффициент  $A_1$  приходится вычислять численно. Отметим, что приведенная в [18 и 11] приближенная формула  $G \approx 1 - 3\alpha$  завышает значение  $G$  при  $\alpha < 1$  в 3—10 раз [19].

При  $\alpha \geq 1$  локальные магнитные пробки существуют только вблизи горизонтальной плоскости симметрии токамака (см. рис. 6), поэтому зависимость  $\delta(\vartheta)$  становится несущественной и удается построить универсальную приближенную формулу для  $G$ . Вычислим  $A_1(\vartheta)$ , воспользовавшись простой параболической моделью ямы с глубиной  $\Delta(Y)$  (1.14) и кривизной (1.16):

$$B(\varphi) = \begin{cases} B_n (1 + \delta N^2 \sqrt{1 - Y^2} \varphi^2 / 2) & \text{при } |\varphi| < \frac{2}{N} \left( \frac{\Delta}{2\delta} \right)^{1/2} (1 - Y^2)^{1/4}; \\ B_x & \text{при } \frac{2}{N} \left( \frac{\Delta}{2\delta} \right)^{1/2} (1 - Y^2)^{-1/4} < \\ & < |\varphi| < \frac{\pi}{N}. \end{cases} \quad (2.37)$$

Подставляя эту зависимость в формулу (2.34) и учитывая, что при  $\alpha \gg 1$   $\sin \vartheta \approx \vartheta \approx Y/\alpha$ , получаем следующую асимптотическую формулу:

$$G = \frac{A_1}{A_{1x}} = \frac{9}{16\alpha^3} \int_0^1 \left( \frac{\Delta(Y)}{2\delta} \right)^2 \frac{Y^2 dY}{(1 - Y^2)^{1/4}} \approx \frac{0,015}{\alpha^3}. \quad (2.38)$$

Вычисление  $G^0$ , проведенное в [18] для реальной зависимости  $B(\varphi)$ , приводит приблизительно к такому же асимптотическому выражению  $G \approx 0,02/\alpha^3$ . Из рис. 23 видно, что формула (2.38) при  $\alpha \leq 1$  дает погрешность, не превышающую 40 %, что вполне удовлетворительно для определения гофрировочных потерь.

Интегрирование формулы (2.33) по скорости приводит к следующему выражению для потоков частиц и тепла:

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ Q/T \end{bmatrix} = - \frac{\delta^{3/2}}{v_i} \left( \frac{cT}{eBR} \right)^2 n \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \ln f_{m0}/dr \\ d \ln T/dr \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

где 
$$I_n = \frac{64}{27\pi^2} \int_{U\delta}^{U_d} \frac{U^{3+n} \exp(-U)}{c(\sqrt{U})} dU; \quad U_d = \omega_d/T;$$

$U_\delta = [v_i R / (\delta^{3/2} v_T N)]^{1/2}$  — максимальная и минимальная энергии частиц, удовлетворяющие неравенству  $\tau_i \leq \tau_\delta \leq \tau_d$ . Говорить о гофрировочном переносе в режиме высоких частот соударений имеет смысл только при  $U_\delta \ll 1$ ,  $U_d \gg 1$ . В этом случае, считая  $U_\delta = 0$  и  $U_d = \infty$ , имеем

$$I_1 \approx 6,6; \quad I_2 \approx 32; \quad I_3 \approx 188,7. \quad (2.40)$$

Если гофрировочный перенос частиц — единственный неамбиполярный процесс, то с учетом малости электронной диффузии по сравнению с ионной условие амбиполярности диффузии сводится к  $\Gamma = 0$ . Тогда радиальный перенос тепла локально-захваченными частицами принимает более простой вид:

$$Q = -n\chi^{TH} dT/dr, \quad (2.41)$$

$$\text{где } \chi^{TH} = \frac{\delta^{3/2} G}{v_i} \left( \frac{cT}{eBR} \right)^2 \left( I_3 - \frac{I_2^2}{I_1} \right) \approx \frac{33\delta^{3/2} G}{v_i} \left( \frac{cT}{eBR} \right)^2.$$

Отличие числового коэффициента в этой формуле от значения, полученного в [18], связано в основном с тем, что в них по-разному (в  $\sqrt{2}$  раз) определена ионная частота соударений  $\nu_i$ . Использование асимптотического выражения (2.38) приводит к следующему значению коэффициента ионной гофрировочной теплопроводности в режиме высоких частот соударений при  $Nq\delta \leq \varepsilon$ :

$$\chi^{TH} \approx \frac{0,56\delta_0^{3/2}}{v_i} \left( \frac{Nq\delta_0}{\varepsilon} \right)^3 \left( \frac{cT}{eBR} \right)^2. \quad (2.42)$$

Теплопроводность (2.42) учитывает только вклад от локальных пробок на внешнем обводе тора  $\vartheta \sim 0$ . Вклад от внутреннего обвода  $\vartheta \sim \pi$  меньше по сравнению с (2.42) в  $(\delta_\pi/\delta_0)^{9/2}$  раз, где  $\delta_\pi(r) = \delta(r, \pi)$ . Для токамаков этот вклад составляет  $10^{-2}$ — $10^{-4}$  (см. гл. 1). При необходимости вклад от внутреннего обвода должен быть приплюсован к теплопроводности (2.42). Отметим, что при численном вычислении  $G$  и  $A_1$  по формулам (2.34)—(2.36) этот вклад учитывается автоматически.

### 2.3. Потоки локально-захваченных частиц при низких частотах соударений

**Кинетическое уравнение для разветвляющихся траекторий.** В режиме низких частот соударений  $\tau_{dr} \ll \tau_\delta$  орбита частицы представляет собой замкнутую кривую, включающую участок движения по банановой орбите ( $B$  и  $C$  на рис. 21) и участок движения по дрейфовой траектории локально-запертой частицы ( $A$ ). При этом вершина банановой орбиты со стороны, противоположной направлению тороидального дрейфа (точка  $d$  на рис. 21), выглядит в проекции на плоскость  $r, \vartheta$  как точка ветвления. С вероятностью  $p$  (1.60) частица возвращается по отрезку  $A$  и с вероятностью  $1-p$  — по отрезку  $B$ .



Прежде чем перейти к решению кинетического уравнения для орбит с ветвлениями, проведем ту же операцию, что и в случае высоких частот соударений: усредним дрейфовое уравнение по пролету одной магнитной ямы. Фактически такое усреднение означает отбрасывание членов, малых по параметрам  $\tau_i/\tau_\delta$  и  $1/(Nq)$ . С учетом сохранения средней продольной скорости на участках банановой орбиты кинетическое уравнение принимает вид

$$\bar{v}_\parallel \frac{\partial f}{\partial t} + v_d \nabla f = - \frac{v_i(v)}{\partial J / \partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( J \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right), \quad (2.43)$$

где  $\bar{v}_\parallel$  — средняя по периоду одной ямы продольная скорость банановой частицы. В этом уравнении, как и в (2.21), оператор столкновений выбран в виде (2.22) вследствие узости рассматриваемой области в пространстве скоростей. На участке  $A$ , когда частица заперта в локальные пробки ( $\bar{v}_\parallel = 0$ ),  $J = J_i$ , и уравнение (2.43) идентично уравнению (2.25). На участках  $B$  и  $C$ , где частица пролетает сквозь локальные минимумы магнитного поля,

$$J = \int_{i_0}^{i_0 + 2\pi R/N} v_\parallel dt; \quad \tau_i = - \frac{m}{B} \frac{\partial J}{\partial \mu}; \quad \bar{v}_\parallel = \frac{2\pi R}{N\tau_i}. \quad (2.44)$$

При низких частотах соударений кинетическое уравнение (2.43) решается разложением по малому параметру  $\tau_d/\tau_\delta$ . В нулевом приближении без учета столкновений

$$\frac{df_0}{dt} \equiv \bar{v}_\parallel \frac{\partial f_0}{\partial t} + v_d \nabla f_0 = 0. \quad (2.45)$$

Для этого уравнения ветвление траекторий в точке  $d$  не создает никаких трудностей. Из (2.45) просто следует, что  $f_0 = \text{const}$  на всех участках замкнутой орбиты независимо от вероятности попадания на ту или иную ветвь. Подставляя теперь  $f_0$  в правую часть уравнения (2.43), получаем уравнение для  $f_1$ :

$$\frac{df_1}{dt} = - \frac{v_i(v)}{\partial J / \partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( J \mu \frac{\partial f_0}{\partial \mu} \right). \quad (2.46)$$

Решение этого уравнения является интегралом по траектории от правой части:

$$f_1 = - \int \frac{v_i(v)}{\partial J / \partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( J \mu \frac{\partial f_0}{\partial \mu} \right) dt. \quad (2.47)$$

Однозначность функции  $f_1$  требует обращения в нуль интеграла (2.47) по замкнутой траектории. Это ограничение дает еще одно уравнение для  $f_0$ , позволяющее снять неоднозначность решения уравнения (2.45).

Специфика использования условия однозначности  $f_1$  для разветвляющихся траекторий состоит в том, что интегралы (2.47) по замкнутым участкам  $C+B$  и  $C+A$  различны. Чтобы устранить это затруднение, надо учесть, что периодической на одном проходе, т. е. возвращающейся в исходную точку, является лишь проекция

траектории на плоскость  $r, \vartheta$ . Полная же траектория, включающая движение по тороидальному углу  $\varphi$ , строго говоря, непериодична. Однако число проходов по пути  $A$ , отнесенное к полному числу оборотов по замкнутой орбите, стремится к пределу, являющемуся вероятностью захвата частиц в локальные магнитные пробки  $p$  (1.60). Используя это обстоятельство и то, что в среднем по времени функция  $f_1$  не должна возрастать (аналог условия однозначности), получаем следующее уравнение для  $f_0$  [27]:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[ \mu \frac{J_b}{2} \frac{\partial f_0}{\partial \mu} + \mu \frac{J_b}{2} (1-p) \frac{\partial f_0}{\partial \mu} + p \mu N_A J_l \frac{\partial f_0}{\partial \mu} \right] = 0, \quad (2.48)$$

где  $J_b = \oint_{C+B} v_{\parallel} dl$  — продольный адиабатический инвариант для банановых частиц;  $N_A = \int_A dt/\tau_l$  — число отражений от пробок на участке  $A$ . Первые два члена в уравнении (2.48) возникли в результате интегрирования по участкам орбиты  $C$  и  $B$ . На этих участках суммирование по проходу всех магнитных пробок приводит к  $\Sigma J = J_b/2$ . Последний член в (2.48) связан с участком  $A$ , где из-за сохранения  $J_l$  суммирование приводит просто к  $N_A J_l$ .

**Решение кинетического уравнения.** Полный анализ уравнения (2.48) проведен в приложении ПЗ. Здесь же ограничимся только одним наиболее важным предельным случаем. Оценки оператора столкновений, проведенные в § 2.1, показали, что при  $Nq\delta \ll \epsilon$  на участках банановой орбиты  $B$  и  $C$  оператор столкновений более эффективен, чем на участке  $A$ . Поэтому при  $Nq\delta \ll \epsilon$  можно пренебречь последним слагаемым в уравнении (2.48). Пренебрегая на банановых участках отклонением траектории частицы от силовой линии, что соответствует отбрасыванию неоклассических эффектов, получаем, что решением уравнения (2.48) на участках  $B$  и  $C$  будет максвелловская функция

$$f_0|_{B,C} = f_m(r). \quad (2.49)$$

Функцию распределения локально-запертых частиц найдем из условия постоянства  $f_0$  на траектории. Фактически это означает, что функция  $f_{0A}(r, \vartheta, \mu)$  равна максвелловской функции в точке  $r_b$ , где она превращается в банановую. Значение  $r_b$  по заданным  $r, \vartheta, \mu$  получают следующим образом. Сначала вычисляются  $J(r, \vartheta, \mu)$ . Затем на заданной траектории  $\vartheta(r)$ , которую можно получить из (1.19) или из условия постоянства  $J_l$ , с помощью уравнения (1.54) находят  $r_b$ :

$$J_S(r_b, \vartheta(r_b)) = J_l(r, \vartheta, \mu). \quad (2.50)$$

Функцию распределения  $f_{0A}$  определяют в итоге с помощью равенства

$$f_{0A}(r, \vartheta, \mu) = f_m(r_b(r, \vartheta, \mu)). \quad (2.51)$$

В настоящем обзоре рассматриваются лишь потоки диффузионного типа, что предполагает слабое отличие функции распре-

ления от максвелловской. В этом случае равенство (2.51) можно приближенно записать так:

$$f_{0A}(r, \vartheta, \mu) \approx f_m(r) + (r_b - r) df_m/dr. \quad (2.52)$$

Если такого разложения делать нельзя из-за большого различия значений  $r_b$  и  $r$ , то потоки не будут выражаться через градиенты и диффузионные уравнения переноса окажутся несправедливыми.

Для вычисления  $f_{1A}$  и радиальных потоков требуется величина  $\partial r_b / \partial \mu$ . Ее можно найти из условия выхода из пробок (2.50):

$$\frac{\partial r_b}{\partial \mu} = \frac{\partial J_I}{\partial \mu} / \left( \frac{\partial J_S}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \frac{\partial J_S}{\partial \vartheta} \right), \quad (2.53)$$

где  $\partial \vartheta / \partial r$  задается траекторией  $\vartheta(r)$  и может быть найдено, например, из условия постоянства  $J_I$ :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = - \frac{\partial J_I}{\partial r} / \frac{\partial J_I}{\partial \vartheta}. \quad (2.54)$$

Отметим, что аналогичные выражения, полученные в [11], не учитывают зависимости  $J_S$  от  $r$  и справедливы только тогда, когда траектории локально-захваченных частиц близки к окружностям ( $r = \text{const}$ ).

Подставив теперь (2.52)–(2.54) в выражение (2.47), найдем первую поправку к функции распределения:

$$f_1 = - \frac{df_m}{dr} \int \frac{v_i(\vartheta)}{\partial J_I / \partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ J_I \mu \frac{\partial J_I}{\partial \mu} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial J_I}{\partial \vartheta} / \left( \frac{\partial J_S}{\partial r} \frac{\partial J_I}{\partial \vartheta} - \frac{\partial J_S}{\partial \vartheta} \frac{\partial J_I}{\partial r} \right) \right] \frac{dl_d}{v_d}, \quad (2.55)$$

где  $l_d$  — длина дрейфовой траектории. Общее выражение для потоков при низких частотах соударений получается после подстановки формулы (2.55) в (2.32). Однако использование этого выражения для расчета радиальных потоков затруднительно из-за сложного вида функций  $J_S(r, \vartheta)$  и  $J_I(r, \vartheta, \mu)$  в реальной геометрии магнитного поля. Поэтому при вычислении потоков [11, 23, 24] используют модельные функции, позволяющие более простыми выражениями связать точку выхода из пробок  $r_b$  с исходными параметрами  $r, \vartheta, \mu$ .

**Вычисление радиальных потоков в простой модели ямы.** Воспользуемся для вычисления потоков параболической моделью  $B(\varphi)$  без учета зависимости длины ямы от  $Y$ :

$$B(\varphi) = B_n \left( 1 + \frac{\delta N^2 \Phi^2}{2} \right) \quad \text{при} \quad |\varphi| < \frac{2}{N} \left( \frac{\Delta}{2\delta} \right)^{1/2}. \quad (2.56)$$

Использование модели ямы магнитного поля (2.37) привело бы к слишком сложным выражениям для  $J_I$  и  $J_S$ . С помощью выражения (2.56) найдем продольный инвариант и фазовый объем,

ограниченный сепаратрисой:

$$\left. \begin{aligned} J_I(r, \vartheta, \mu) &= \oint \sqrt{\frac{2}{m} V \omega_k - \mu B(\varphi)} R d\varphi = \frac{\sqrt{2} \pi R v}{N \sqrt{\delta}} \left( 1 - \frac{\mu B_n}{\omega_k} \right); \\ J_S(r, \vartheta) &\equiv J_I \left( r, \vartheta, \frac{\omega_k}{B_x} \right) = \frac{\sqrt{2} \pi R v}{N \sqrt{\delta}} \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

Для упрощения вместо зависимости глубины пробок от координат (1.14) будем считать профиль глубины пробок параболическим:

$$\Delta(Y) = 2\delta(1 - Y^2) = 2\delta(1 - z^2/z_m^2). \quad (2.58)$$

Этот профиль правильно описывает качественный характер зависимости (1.14) и дает точное значение в максимуме и при  $Y=1$ .

В этом параграфе ограничимся случаем  $\Phi=0$ . Учет электрического поля выполнен в следующем параграфе при анализе случая произвольных частот соударений. При  $\Phi=0$  локально-захваченные частицы движутся по вертикальным прямым  $R=\text{const}$  вдоль оси  $z$ . Выход из пробок согласно (2.57), (2.58) происходит в этом случае при

$$z_b = z_m [1 - (1 - \mu B_n / \omega_k) / (2\delta)]^{1/2}. \quad (2.59)$$

При  $Nq\delta \ll \epsilon$  текущий радиус  $r$  можно приближенно описывать формулой  $r = r_1 + z^2/(2r)$  (см. рис. 21), которая с учетом (2.59) позволяет следующим образом выразить  $r_b$  через  $r, \vartheta, \mu$ :

$$r_b \approx r + \frac{z_b^2 - z^2}{2r} = r + \frac{z_m^2}{2r} \left[ 1 - \frac{r^2 \vartheta^2}{z_m^2} - \frac{1}{2\delta} \left( 1 - \frac{\mu B_n}{\omega_k} \right) \right]. \quad (2.60)$$

Явная зависимость  $r_b$  от  $\mu$  дает возможность непосредственно вычислить производную радиуса выхода из пробок по  $\mu$ :

$$\partial r_b / \partial \mu = z_m^2 B_n / (4r\delta\omega_k).$$

Подставляя это выражение в формулу (2.55), получаем первую поправку к функции распределения:

$$f_1 = - \frac{df_m}{dr} \int \frac{v_i(v)}{\partial J_I / \partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( J_I \mu \frac{z_m^2 B_n}{4r\delta\omega_k} \right) \frac{dz}{v_d} = - \frac{df_m}{dr} \frac{v_i(v) m \omega_B R z_m^2 \vartheta}{4\delta\omega_k}. \quad (2.61)$$

При получении этого выражения были учтены линейная зависимость  $J_I(\mu)$  в рассматриваемой модели (2.57) и то, что  $J_I \ll \mu \partial J_I / \partial \mu$ . Приведем также полную функцию распределения локально-захваченных частиц, вычисленную с достаточной для определения ра-

диальных потоков точною [23]:

$$f = f_0 + f_i = f_m + \frac{df_m}{dr} (r_b - r) + f_1 = f_m + \frac{df_m}{dr} \left[ \frac{z_m^2}{2r} \left( 1 - \frac{r^2 \vartheta^2}{z_m^2} - \frac{1}{2\delta} \left( 1 - \frac{\mu B}{\omega_k} \right) \right) - \frac{v_i(v) m \omega_B R z_m^2 \vartheta}{4\delta \omega_k} \right]. \quad (2.62)$$

Это выражение дает наглядное представление о распределении локально-запертых частиц при низких частотах соударений и полезно для анализа наиболее важного случая промежуточных частот соударений.

Для нахождения радиальных потоков подставим первую поправку к функции распределения в формулу (2.32). После интегрирования по  $\mu$  потоки частиц и тепла принимают вид

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\Gamma}{Q/T} \right] &= -A_2 \frac{z_m^5 n}{r^3 \sqrt{\delta}} \int_0^\infty \begin{bmatrix} U^{-1} \\ 1 \end{bmatrix} C(\sqrt{U}) e^{-U} \times \\ &\times \left( \frac{d \ln f_{m0}}{dr} + U \frac{d \ln T}{dr} \right) dU, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где  $A_2$  — геометрический фактор:

$$A_2 = \frac{3}{8\pi} \left( \frac{r}{z_m} \right)^3 \int_0^{2\pi} \frac{\Delta}{2\delta} \vartheta^2 d\vartheta \approx \frac{1}{10\pi}. \quad (2.64)$$

При получении последнего равенства использовано предположение о параболической форме ямы (2.58). Интегрирование потоков (2.63) по энергии приводит к следующему выражению для потоков частиц и тепла:

$$\left[ \frac{\Gamma}{Q/T} \right] = -A_2 \frac{N^5 q^5 R^5 \delta_0^{5/2}}{r^3} n v_i \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \ln f_{m0}/dr \\ d \ln T/dr \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

где  $I_n = \int_{U_d}^\infty U^{n-2} C(\sqrt{U}) e^{-U} dU$ ;  $U_d = \omega_d/T = (v_i m \omega_B R^2 q N/T)^{2/5}$  —

минимальная энергия, соответствующая переходу в режим низких частот соударений. Режим низких частот соударений реализуется при  $U_2 \rightarrow 0$ . В этих условиях интегралы  $I_n$  стремятся к пределам

$$I_1 = 1,13; \quad I_2 = 0,53; \quad I_3 = 0,71. \quad (2.66)$$

Используя, как и при получении формулы (2.41), условие амбиполярности  $\Gamma=0$ , запишем ионный теплоперенос в режиме низких частот соударений ( $\tau_\delta \geq \tau_{dr}$ ) в виде (2.41) с коэффициентом теплопроводности

$$\chi^{TL} = \frac{N^5 q^5 R^5 \delta_0^{5/2}}{r^3} v_i A_2 \left( I_3 - \frac{I_2^2}{I_1} \right) \approx 1,5 \cdot 10^{-2} v_i \frac{N^5 q^5 R^5 \delta_0^{5/2}}{r^3}. \quad (2.67)$$

В заключение отметим, что теплопроводность (2.67), как и (2.42), справедлива лишь при  $Nq\delta \ll \varepsilon$ . Помимо этого, обе формулы являются только предельными при  $U_d \rightarrow \infty$  и  $U_d \rightarrow 0$  соответственно. Для ионов же типично  $U_d \sim 1$ , поэтому выражениями (2.42) и (2.67) можно пользоваться лишь для оценок. Для описания электронного гофрировочного теплопереноса в большинстве случаев можно использовать коэффициент теплопроводности (2.41) или (2.42) с заменой  $v_i$  на  $v_e$ .

## 2.4. Ионный теплоперенос в переходном режиме

**Кинетическое уравнение в безразмерных переменных.** При вычислении потоков локально-запертых частиц в пределах низких и высоких частот соударений одно и то же кинетическое уравнение (2.25), (2.46) решалось с помощью разложения по малым параметрам  $\tau_d/\tau_\delta$  и  $\tau_\delta/\tau_d$ . При этом для наглядности сохранялись естественные переменные задачи. В общем случае  $\tau_d \sim \tau_\delta$  наглядность все равно сохранить не удастся, поэтому целесообразно с самого начала формализовать уравнения, перейдя к безразмерным  $Y, \xi, \kappa$ . Переменная  $\kappa$  вместо  $\mu$  вводится таким образом, чтобы область, занятая локально-запертыми частицами, отобразилась на единичный интервал:

$$\kappa(\mu, r, \vartheta) = (1 - \mu B_n / \omega_k) / \Delta. \quad (2.68)$$

Переменная  $\xi(r, \vartheta)$  служит маркером дрейфовой поверхности

$$\frac{dr}{dt} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{d\vartheta}{dt} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} = 0, \quad (2.69)$$

а переменная  $Y$  — это введенная в (1.12) величина, являющаяся отношением вертикальной координаты  $z$  на дрейфовой траектории к максимальному значению  $z_m$ , где исчезают локальные магнитные пробки. В переменных  $Y, \xi, \kappa$  кинетическое уравнение (2.25) принимает вид [30]

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{d\kappa}{dt} \frac{\partial f}{\partial \kappa} = \frac{v_i(v)}{\Delta \partial J_l / \partial \kappa} \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( J_l (1 - \kappa \Delta) \frac{\partial f}{\partial \kappa} \right), \quad (2.70)$$

где  $\frac{dY}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial Y}{\partial r} = e_z v_d / z_m$ ;

$$\frac{d\kappa}{dt} = - \frac{1}{\Delta} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu B_n}{\omega_k} \right) - \frac{\kappa}{\Delta} \frac{d\Delta}{dt}.$$

Упростим уравнение (2.70), воспользовавшись той же моделью магнитного поля (2.56), которая была использована при вычислении потоков в пределе низких частот соударений. В этом случае продольный инвариант согласно (2.57) будет пропорционален  $\kappa$ :

$$J_l = \sqrt{2} \pi R v \kappa \Delta / (N \sqrt{\delta}). \quad (2.71)$$

Используя это выражение и пренебрегая малыми слагаемыми по-

рядка  $\Delta$ , перепишем кинетическое уравнение (2.70) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial \kappa}{\partial Y} \frac{\partial f}{\partial \kappa} = b(Y) \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( \kappa \frac{\partial f}{\partial \kappa} \right), \quad (2.72)$$

где  $b(Y) = z_m v_i(v) / (\Delta v_d \epsilon_z)$  — параметр, характеризующий отношение скорости диффузии в пространстве скоростей к дрейфовой скорости;  $\frac{d\kappa}{dY} = \frac{d\kappa}{dt} / \frac{dY}{dt}$ .

С помощью формулы (2.71) и условия постоянства  $J_l$  на дрейфовой траектории величина  $d\kappa/dY$  может быть выражена через известные величины

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa}{dY} &= -\frac{\kappa}{\Delta} \frac{d\Delta}{dY} - \kappa \frac{\sqrt{\delta}}{Rv} \frac{d}{dY} \left( \frac{Rv_{\perp}}{\sqrt{\delta}} \right) = \\ &= -\frac{\kappa}{\Delta} \frac{d\Delta}{dY} - \frac{\kappa \sqrt{\delta}}{R \sqrt{B_n}} \frac{d}{dY} \left( \frac{R \sqrt{B_n}}{\sqrt{\delta}} \right). \end{aligned}$$

При  $Nq\delta \ll \epsilon$  изменение  $R \sqrt{B_n/\delta}$  на траектории происходит значительно медленнее изменения  $\Delta$ . Поэтому приближенно будем считать

$$\frac{d\kappa}{dY} = -\frac{\kappa}{\Delta} \frac{d\Delta}{dY}. \quad (2.73)$$

В переменных  $Y, \kappa$  область, занятая локально-захваченными частицами, ограничена неравенствами  $0 < \kappa < 1$ ,  $|Y| < 1$ . Граничными условиями для (2.72) являются условия непрерывности функции распределения и потока частиц на границе между локально-захваченными и банановыми частицами  $\kappa = 1$ . На остальных границах никаких дополнительных условий, помимо ограниченности  $f$ , не требуется, поскольку соответствующие коэффициенты обращаются в нуль на этих границах ( $J_l = 0$  при  $\kappa = 0$ , а  $\Delta = 0$  при  $Y = \pm 1$ ).

Для обеспечения условия непрерывности на границе  $\kappa = 1$  уравнение (2.72) должно решаться совместно с уравнением для банановых частиц в прилегающей области. Однако, как уже обсуждалось в § 2.3, искажение распределения банановых частиц вследствие обмена с локально-захваченными незначительно. Поэтому функция распределения банановых частиц считается максвелловской с температурой и плотностью, определяемыми магнитной поверхностью. Эту величину и будем использовать в качестве граничного условия при  $\kappa = 1$ . Отклонение распределения банановых частиц от максвелловского, вызываемое смещением относительно силовых линий и приводящее к неоклассическому переносу, учитывать не будем. Таким образом, граничным условием для уравнения (2.72) на прямой  $\kappa = 1$  будет  $f(Y, 1) = f_b(Y)$ , где  $f_b$  — максвелловское распределение банановых частиц на магнитной поверхности, на которую попадают локально-захваченные частицы при выходе на границу  $\kappa = 1$ .

Для нахождения  $f_b(Y)$  рассмотрим траектории локально-захваченных частиц. Как показано в § 1.2, локально-захваченные частицы, движущиеся с суммарной скоростью тороидального  $v_d$  и электрического  $v_E$  дрейфов, описывают траектории, близкие к окружностям радиусом  $r_d = r_0(1 + v_d/v_E)$  с центром, смещенным на  $r_0 v_d/v_E$  относительно центра шнура. Поскольку в диффузионном режиме смещение частиц относительно магнитной поверхности значительно меньше характерных поперечных масштабов плазмы, то в выражении для смещения можно воспользоваться приближенной формулой

$$\Delta r \approx v_d z^2 / (2r_0(v_d + v_E)). \quad (2.74)$$

Эта формула применима всегда, за исключением случая компенсации электрического и магнитного дрейфов  $|v_d + v_E| \ll v_d$ , когда радиус дрейфовой окружности мал ( $r_d \ll r_0$ ) и частицы обходят всю дрейфовую траекторию. Для анализа случая компенсации электрического и тороидального дрейфов в уравнениях движения необходимо учесть зависимость радиального электрического поля от радиуса. При этом смещение локально-захваченных частиц относительно дрейфовой поверхности примет вид

$$\Delta r \approx \frac{1}{a_E} \left[ r_0 \left( 1 + \frac{v_E}{v_d} \right) - \left( r_0^2 \left( 1 + \frac{v_E}{v_d} \right)^2 - z^2 a_E \right)^{1/2} \right], \quad (2.75)$$

где  $a_E = d \ln E_r / (d \ln r)$ . Эта формула переходит в (2.74) при  $r_d \gg z_m \sqrt{a_E}$  и описывает ограничение смещения  $\Delta r$  величиной  $r_d/a_E$  при  $r_d \ll z_m \sqrt{a_E}$ .

Поскольку особенность в формуле (2.74) не приводит к расходимости при последующем интегрировании, то форма сглаживания особенности и, в частности, параметр  $a_E$  слабо влияет на конечные выражения. Поэтому, чтобы избежать введения дополнительного параметра  $a_E$ , воспользуемся модельным сглаживанием особенности в  $\Delta r$ , правильно отражающим высоту и полуширину пика:

$$\Delta r = v_d z^2 / [v_E (2r_d + z_m^2/r_d)], \quad (2.76)$$

где  $r_b = r_0(1 + v_d/v_E)$ . С учетом этого выражения граничное условие для уравнения (2.72) можно записать в виде

$$f(Y, 1) = f_b(Y) \equiv f_m(r(Y, z_m)) \approx f_m(r) + \frac{v_d z_m^2 Y^2}{v_E (2r_d + z_m^2/r_d)} \frac{df_m}{dr}. \quad (2.77)$$

**Решение кинетического уравнения.** Кинетическое уравнение (2.72) с коэффициентом (2.73) и граничным условием (2.77) будем решать с помощью разложения по системе ортогональных функций. Для сокращения вычислений целесообразно выбрать набор функций, приближающий решение наименьшим количеством членов ряда. Решение кинетического уравнения как в пределе высоких частот соударений (2.30), так и в пределе низких час-



тот соударений (2.62) является линейной функцией  $\mu$ , а следовательно, и  $\kappa$ . Поэтому наиболее удобным представляется использование полиномов Лежандра

$$f(Y, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(Y) P_n(2\kappa - 1). \quad (2.78)$$

Подстановка этой суммы в уравнение (2.72) с учетом условий ортогональности для полиномов Лежандра приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений [30]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m+1} \frac{dc_m}{dY} - \frac{d \ln \Delta}{dY} \left( \frac{m}{2m+1} c_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \right) = \\ = b(Y) \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n [n(n+1) - m(m+1)]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Граничное условие (2.77) дает дополнительное ограничение на  $c_n(Y)$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(Y) = f_b(Y). \quad (2.80)$$

Для приближенного решения кинетического уравнения ограничимся конечным числом членов разложения. Для описания основных характеристик точного решения достаточно сохранить по крайней мере два члена в разложении (2.78). Кроме того, из-за приближенного характера самого уравнения (2.72), обусловленного модельным описанием магнитного поля (2.56), нет особого смысла в увеличении числа членов. Сохраняя два члена в разложении (2.78), с учетом граничного условия (2.80) вместо бесконечной системы уравнений (2.79) получаем одно уравнение для  $c_1(Y)$ :

$$-\frac{dc_1}{dY} + \frac{df_b}{dY} - \frac{d \ln \Delta}{dY} c_1 - 2b(Y) c_1 = 0. \quad (2.81)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$c_1(Y) = \frac{1}{\Delta(Y)} \int_{-1}^Y \Delta(\tau) \frac{df_b}{d\tau} \exp \left( -2 \int_{\tau}^Y b(u) du \right) d\tau. \quad (2.82)$$

Подставляя сюда функцию распределения  $f_b$  (2.77), параболическую зависимость глубины магнитной ямы (2.58) и выражение

$$b(Y) = z_m v_i(v)/(v_d + v_E) \Delta(Y) = b_0/(1 - Y^2), \quad (2.83)$$

где  $b_0 = z_m v_i(v)/(2\delta(v_d + v_E))$ , получаем

$$c_1(Y) = \frac{2f_c}{1 - Y^2} \int_{-1}^Y (1 - \tau^2) \tau \left( \frac{1 - Y}{1 + Y} \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \right)^{b_0} d\tau. \quad (2.84)$$

Здесь  $f_c = \frac{df_m}{dr} \frac{v_d z_m^2}{v_E (2r_d + z_m^2/r_d)}$  — коэффициент при  $Y^2$  в выражении (2.77). Таким образом, функция распределения локально-захваченных частиц может быть представлена в виде

$$f(Y, \kappa) = c_0 + c_1(2\kappa - 1) = f_b + 2c_1(\kappa - 1) = f_m + f_c Y^2 + 2c_1(\kappa - 1). \quad (2.85)$$

**Вычисление потоков.** Для вычисления потоков подставим полученную функцию распределения в формулу (2.32). Первые два члена в (2.85), естественно, не дают вклада в радиальные потоки. Учитывая лишь последний член,  $2c_1(\kappa - 1)$ , и переходя к безразмерным переменным, получаем следующее выражение для потоков частиц и тепла при произвольных частотах соударений:

$$\left[ \begin{array}{c} \Gamma \\ Q \end{array} \right] = \left( \frac{z_m}{r} \right)^2 \frac{\sqrt{\delta}}{\omega_{BR} \sqrt{2}} \int \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \omega_k \end{array} \right] v^4 dv \int_{-1}^1 Y c_1(Y) (1 - Y^2) dY. \quad (2.86)$$

При получении этого выражения учтено, что для случая  $Nq\delta \ll \epsilon$  локальные пробки существуют только в узкой зоне малых полюсидальных углов, поэтому  $\sin \vartheta \approx \vartheta \approx Y z_m / r$ . Подставляя в (2.86) вычисленное выше значение  $c_1$  (2.84), преобразуем радиальные потоки к виду

$$\left[ \begin{array}{c} \Gamma \\ Q \end{array} \right] = \frac{z_m^4}{r^2} \frac{\sqrt{2\delta}}{\omega_{BR}} \int \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \omega_k \end{array} \right] \frac{I_w(b_0) v_d (df_m/dr) v^4 dv}{2r_0 (v_d + v_E) + z_m^2 v_E^2 / (r_0 (v_d + v_E)^2)}, \quad (2.87)$$

$$\text{где } I_w(b_0) = \int_{-1}^1 Y \left( \frac{1-Y}{1+Y} \right)^{b_0} \int_{-1}^Y \tau \frac{(1+\tau)^{b_0+1}}{(1-\tau)^{b_0-1}} d\tau dY.$$

Вычисленные численно значения интеграла  $I_w(b_0)$  хорошо аппроксимируются приближенной формулой

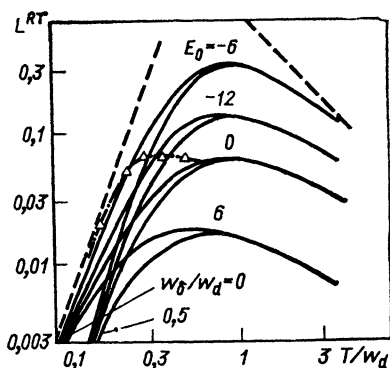
$$I_w(b_0) \approx \frac{8b_0}{15(2 + 3|b_0| + 7b_0^2)}, \quad (2.88)$$

которая дает точные значения при  $b_0 = 1$  и в двух предельных случаях  $b_0 \gg 1$  и  $b_0 \ll 1$ . Переходя в формуле (2.87) к переменной  $U = \omega_k / T$  и выражая производную  $df_m/dr$  через производные плотности, температуры и электрического поля, с учетом (2.88) получаем

$$\left[ \begin{array}{c} \Gamma \\ Q/T \end{array} \right] = \frac{-4\sqrt{2} z_m^4 \delta^{1/2} n T}{15\pi^{3/2} r^3 m R \omega_B} \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \ln f_{m0}/dr \\ d \ln T/dr \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

Рис. 24. Зависимость теплопроводности локально-запертых частиц от температуры (2.90) при различной напряженности радиального электрического поля ( $E_0 = E_r eR/T$ ):

$\Delta$  — результаты численного расчета теплопроводности [31]; — — асимптотические значения  $\chi^{TH}$  и  $\chi^{TL}$ , соответствующие пределам  $w_\delta \ll T \ll w_d$  и  $w_d \ll T$



где

$$I_n = \int_{U_\delta}^{\infty} \frac{U^{3/2+n} b_0(U) e^{-U} dU}{[U + E_0 + z_n^2 E_0^2 / (2r^2 (E_0 + U)^2) (7b_0^2 + 3|b_0| + 2)]};$$

$$U_\delta = w_\delta/T; \quad E_0 = E_r eR/T; \quad b_0(U) = \frac{3\sqrt{2\pi}}{8U^{3/2}} \frac{C(\sqrt{U})}{(E_0 + U)} \left(\frac{w_d}{T}\right)^{3/2};$$

$w_d = (T^{3/2} v_i m \omega_B R^2 q N)^{2/5}$  — энергия ионов, характеризующая переход между режимами низких и высоких частот соударений;  $w_\delta = (v_i R T^{3/2} m_i^{1/2} / (\delta^{3/2} N))^{1/2}$  — минимальная энергия локально-захваченных частиц.

Для оценки эффекта переноса локально-захваченных ионов вычислим гофрировочный поток тепла, считая поток частиц равным нулю ( $\Gamma=0$ ). Тогда поток тепла, создаваемый локально-захваченными ионами, будет выражаться формулой (2.41) с коэффициентом

$$\chi^{RT} \approx 0,07 \frac{N^4 q^4 R_0^3 \delta_0^{3/2} w_d}{[r^3 + 0,05 (NqR\delta_0)^3]} L^{RT} \left( \frac{T}{w_d}, E_0, \frac{w_\delta}{w_d} \right), \quad (2.90)$$

где  $L^{RT} = (T/w_d) (I_3 - I_2/I_1)$ . Дополнительное слагаемое введено в знаменатель для устранения расходимости при  $r \rightarrow 0$ , когда нарушается условие  $r > NqR\delta_0$ . Множитель 0,05 выбран с таким расчетом, чтобы при высоких частотах соударений выражение (2.90) правильно аппроксимировало коэффициент теплопроводности  $\chi^{TH}$  (2.41). Семейство кривых, показывающих зависимость  $L^{RT}$  от  $T/w_d$  для различных параметров  $E_0$  и  $w_\delta/w_d$  представлено на рис. 24.

При высоких частотах соударений, соответствующих температуре  $w_\delta \ll T \ll w_d$ , коэффициент теплопроводности (2.90) переходит в асимптотическое выражение (2.42), но с числовым множителем 1,1 вместо 0,5. Это значение приблизительно в 1,5 раза больше коэффициента теплопроводности, рассчитанного в [18] с учетом ре-

альной формы магнитной ямы. Различие возникает как из-за модельной формы магнитной ямы, так и из-за приближений, сделанных при решении уравнения (2.72). В области высоких частот соударений ( $T \gg \omega_d$ ) коэффициент теплопроводности (2.90) при  $E_r = 0$  в точности совпадает с выражением (2.67). При  $E_r \gg T/(eR)$  транспортные коэффициенты согласно (2.89) уменьшаются пропорционально  $E_r^{-2}$ . Однако в действительности это наблюдается только при совпадении направлений электрического и тороидального дрейфов. Если же знаки  $v_E$  и  $v_d$  разные, то при умеренной амплитуде радиального электрического поля [ $E_r \leq 10 T/(eR)$ ], типичной для плазмы токамака, ионная гофрировочная теплопроводность возрастает (рис. 24).

На рис. 23 представлены также результаты численного моделирования ионных гофрировочных потерь из [31], где впервые наблюдалось отклонение от зависимости  $\chi^{TH} \sim v_i$ . Численные расчеты выполнены при  $E_r = 0$  и  $\omega_\delta \sim 10^{-2}$  Тл. Можно видеть, что отношение значений коэффициента теплопроводности, полученных численно и с помощью формулы (2.90) при  $E_r = 0$ , различаются не более чем в 1,5 раза. Разница может быть объяснена использованием предположения  $z_m \ll r$  в аналитических вычислениях (в расчетах [31]  $z_m \approx 0,6r$ ) и неточным выбором функции распределения нулевого порядка в численном моделировании.

Оценим характерные энергии  $\omega_d$  и  $\omega_\delta$ . Если  $R_0$  выразить в метрах,  $B_0$  — в Тл,  $n$  — в  $\text{см}^{-3}$ , то выражения для  $\omega_d$  и  $\omega_\delta$  можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \omega_d &\approx (5 \cdot 10^{-7} n B_0^2 q N)^{2/5} (m_p/m_i)^{1/5}; \\ \omega_\delta &\approx (5 \cdot 10^{-11} n R_0/N)^{1/2} \delta^{-3/4}, \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

где  $m_p$  — масса протона. Воспользовавшись для оценки параметрами INTOR  $B_0 = 5,5$  Тл,  $R_0 = 5,2$  м,  $N = 12$ ,  $q = 1,2$ ,  $n = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , получим  $\omega_\delta \approx 70 \delta^{-3/4} \sim 2 \div 10$  кэВ и  $\omega_d \approx 35$  кэВ независимо от гофрировки. Таким образом, рабочий диапазон температур токамака реактора попадает в область  $\omega_\delta < T \sim (0,3 \div 0,6) \omega_d$ . Как видно из рис. 23, это как раз область перехода от зависимости  $\chi^{TH}$  к  $\chi^{TL}$ , где асимптотические формулы неприменимы.

### 3. ГОФРИРОВОЧНЫЕ ПОТОКИ БАНАНОВЫХ ЧАСТИЦ

#### 3.1. Качественный анализ процессов переноса

**Высокие частоты соударений. Режим гофрировочного плато.** Анализ траекторий банановых частиц с учетом гофрировки, проведенный в § 1.2, показал, что при каждом отражении ведущий центр банановой частицы смещается на (1.42):

$$D \approx \frac{\delta v}{\omega_J} \left( \frac{Nq\pi}{\varepsilon \sin \vartheta_b} \right)^{1/2} \sin \left( N\varphi \pm \frac{\pi}{4} \right) = D_b \sin \left( N\varphi \pm \frac{\pi}{4} \right), \quad (3.1)$$

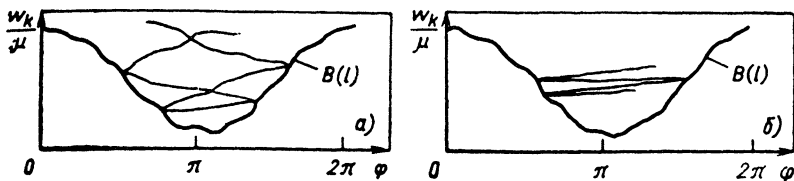


Рис. 25. Изменение  $w_k/\mu$  на траектории банановой частицы в результате столкновений

где  $\varphi$  — тороидальный угол в точке отражения, а знаки (+) и (—) соответствуют отражению в верхней и нижней вершинах банановой орбиты. Под действием столкновений, в которых в силу узости распределения банановых частиц по углам достаточно учесть только рассеяние, частицы меняют магнитный момент. В результате изменяются и точки отражения (рис. 25). Если столкновения достаточно эффективны, так что столкновительное изменение фазы  $N\varphi$  при каждом отражении значительно больше  $\pi$ , то скачки  $D$  (3.1) оказываются случайными (рис. 25, а).

Оценим время  $\tau_c$ , за которое столкновения изменят  $\mu$  настолько, что фаза гофрировки в точке отражения  $F = N\varphi$  (1.44) изменится примерно на  $\pi$ . В соответствии с уравнением силовой линии изменение  $N\varphi$  на  $\pi$  приводит к изменению полоидального угла на  $\Delta\vartheta \sim \pi/(Nq)$ . Поэтому напряженность магнитного поля в точке отражения изменится на  $\Delta B \sim \varepsilon B/(Nq)$ . Этому соответствует увеличение энергии поперечного движения на  $mv_{\perp}^2/2 \sim \mu\Delta B$ . На столько же должна уменьшиться кинетическая энергия продольного движения  $mv_{\parallel} \Delta v_{\parallel} \sim \mu\Delta B \sim mv_{\perp}^2\varepsilon/(Nq)$ , в случае кулоновского рассеяния изменение угла на  $\Delta v/v$  происходит за время  $\tau \sim v^{-1}(\Delta v/v)^2$ . Поэтому эффективное время  $\tau_c$  изменения фазы гофрировки  $F$  на  $\pi$  в результате столкновений может быть оценено как

$$\tau_c \sim v^{-1}(v\varepsilon/Nqv_{\parallel})^2 \sim \varepsilon/(vN^2q^2). \quad (3.2)$$

Таким образом, при  $\tau_c < \tau_b$ , где  $\tau_b \sim qR/(v\sqrt{\varepsilon})$  — время движения банановой частицы между точками отражения (1.36), скачки ведущего центра по радиусу оказываются случайными. Радиальное движение частиц, представляющее собой сумму случайных скачков, является диффузионным с коэффициентом диффузии порядка  $D^2_b/\tau_b$ . С учетом доли частиц  $\sqrt{\varepsilon}$ , принимающих участие в переносе, транспортный коэффициент может быть оценен как

$$\chi^{RP} \sim \sqrt{\varepsilon} \frac{D_b^2}{\tau_b} \sim \delta^2 \rho^2 \frac{q^2 N v_T}{\varepsilon^2 R} \left[ 1 + \left( \frac{Nq\delta}{\varepsilon} \right)^3 \right]^{-1}. \quad (3.3)$$

Гофрировочный коэффициент теплопроводности (3.3), не зависящий от частоты соударений, был получен в [32] и называется ко-

эффицентом переноса в режиме гофрировочного плато. Необходимо отметить, что, помимо условия  $\tau_c < \tau_b$ , ограничивающего сверху энергию частиц, попадающих в режим гофрировочного плато,

$$\omega < \omega_p = Nq\omega_b, \quad (3.4)$$

где  $\omega_b = (T^{3/2}v_i m^{1/2} q R \epsilon^{-3/2})^{1/2} \sim 1$  кэВ — минимальная энергия банановых частиц, есть условие, ограничивающее энергию снизу. Действительно, при получении оценки (3.1) полагалось, что столкновения не изменяют фазы точки отражения  $N\varphi$ , по крайней мере за время пролета последнего гофрировочного периода порядка  $R/N$ , где радиальное смещение в основном и набирается. Поэтому оценка коэффициента теплопроводности (3.3) справедлива только при  $\tau_b/(Nq) < \tau_c < \tau_b$  или

$$(Nq)^{-1/2} \omega_p < \omega < \omega_p. \quad (3.5)$$

**Роль различных механизмов сбоя фазы.** Если энергия частиц превышает  $\omega_p$ , то частицы успевают отразиться от пробок  $\tau_c/\tau_b$  раз (рис. 25,  $\theta$ ), прежде чем столкновения успеют изменить направление радиального смещения. В этом случае необходимо учитывать изменение гофрировочной фазы  $F$  на траектории банановой частицы (1.45). При движении по траектории фаза  $F$  изменяется под воздействием двух процессов: тороидальной прецессии и радиального дрейфа банановых орбит. Приращение за счет тороидальной прецессии между последовательными отражениями составляет

$$\Delta F_T = N\Delta\varphi_b \sim Nq^2\rho/(r\sqrt{\epsilon}), \quad (3.6)$$

а за счет радиального дрейфа —

$$\Delta F_r \sim DNdq/dr \sim \delta\rho(Nq/\epsilon)^{3/2}dq/dr. \quad (3.7)$$

Эти величины должны быть дополнены изменением  $F$  за счет кулоновских столкновений. Согласно приведенным выше оценкам за время пролета банановой орбиты  $\tau_b$  столкновения изменяют фазу  $F$  на

$$\Delta F_c \sim \left(\frac{\tau_b}{\tau_c}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{qRv}{v}\right)^{1/2} \frac{Nq}{\epsilon^{3/4}}. \quad (3.8)$$

Режимы гофрировочного переноса банановых частиц классифицируются в соответствии со значениями приращений фаз (3.6) — (3.8) за время между последовательными отражениями от пробок. Если изменения фазы под воздействием всех трех процессов малы ( $\Delta F_T, \Delta F_r, \Delta F_c \ll 1$ ), то за время оборота  $\tau_b$  параметры орбиты меняются мало. В этих условиях дрейфовые уравнения можно проинтегрировать по времени  $\tau_b$  и, таким образом, свести к бананово-дрейфовым уравнениям, описывающим движение ведущего центра банановой орбиты. Количественный анализ бананово-дрейфового переноса проведен в § 3.2.

Там установлено [11, 33], что гофрировочный перенос обуслов-

лен преимущественно вариацией скорости на силовой линии, а не изменением длины силовой линии. Этот вывод оправдывает использование смещения  $D$  (3.1), при вычислении которого учтена только гофрировочная вариация скорости.

Коэффициент теплопроводности в бананово-дрейфовом режиме оценим позже, а пока рассмотрим границы применимости этого режима. Приращение  $\Delta F$  зависит от энергии частиц:  $\Delta F_T$  и  $\Delta F_r$  пропорциональны  $\omega^{1/2}$ , а  $\Delta F_c \sim \omega^{-2}$ . Поэтому область, где все три приращения меньше единицы, ограничена по энергии снизу и сверху. Нижнюю границу бананово-дрейфового режима мы уже нашли. Это граница перехода в режим гофрировочного плато  $\omega_p$ , где  $\Delta F_c \sim 1$ . При высоких энергиях типично сначала  $\Delta F_T$ , а затем и  $\Delta F_r$  превышает единицу. Если  $\Delta F_T \geq 1 \geq \Delta F_r$ , то имеет место резонансная диффузия [34]. Название этого режима обуславливается тем, что при  $\Delta F_T \geq 1$ ,  $\Delta F_c \ll 1$ ,  $\Delta F_r \ll 1$  фаза  $F$  получает регулярные приращения при каждом последовательном отражении. При этом для большинства частиц радиальное смещение после нескольких отражений  $\Delta r = D_b \Sigma \sin F \sim D_b / \sin(\Delta F_T)$  остается малым и только группа резонансных частиц, для которых  $\Delta F_T = k\pi$ , сильно отклоняется от магнитной поверхности. Именно эта резонансная группа и дает основной вклад в перенос. Энергия частиц, участвующих в резонансном переносе, ограничена снизу неравенством

$$\omega > \omega_r = m\epsilon (\omega_{BF}/Nq^2)^2 \sim 100 \div 500 \text{ кэВ}. \quad (3.9)$$

При еще больших энергиях  $\omega > \omega_r \epsilon^2 / (Nq\delta^2) \sim 1 \div 10 \text{ МэВ}$  значение  $\Delta F_r$  также становится больше единицы. В этих условиях фаза гофрировки становится случайной из-за динамической стохастизации траекторий. Возникающая в результате стохастическая диффузия банановых частиц [13] имеет то же значение, что и перенос в режиме гофрировочного плато (3.3).

В заключение отметим, что гофрировочный перенос банановых частиц по физическим процессам и набору режимов полностью аналогичен переносу частиц в аксиально-несимметричных открытых ловушках [35, 36]. При этом разбиение на режимы носит скорее исторический характер. Как показано в § 3.3, все эти режимы сильно связаны и могут быть описаны одним уравнением.

**Радиальный перенос в бананово-дрейфовом режиме.** Рассмотрим подробнее транспортные процессы в бананово-дрейфовом режиме, начиная от нижней по энергии границы. При  $\omega \geq \omega_p$  частицы испытывают  $\tau_c/\tau_b$  отражений, прежде чем  $\Delta F_c$  станет порядка  $\tau$ . Если  $\Delta F_T \ll 1$  и тороидальная прецессия еще незначительна, смещение частиц за время  $\tau_c$  можно оценить как  $D_b \tau_c/\tau_b$ . Транспортный коэффициент с учетом доли запертых частиц имеет при этом вид [37]

$$\chi^{BH} \sim \sqrt{\epsilon} \left( D_b \frac{\tau_c}{\tau_b} \right)^2 \frac{1}{\tau_c} \sim \frac{\delta^2 v_d^2}{Nq \sqrt{\epsilon} v_i} \sim \chi^{RP} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2. \quad (3.10)$$

При дальнейшем возрастании энергии значение  $\tau_c$  становится

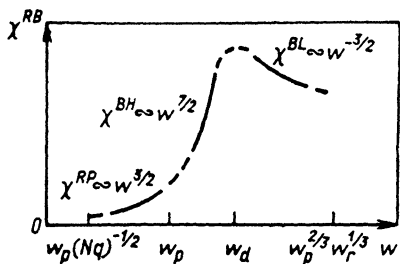


Рис. 26. Зависимость транспортных коэффициентов тепловых банановых частиц от энергии:

$\omega_p$  и  $\omega_d$  — границы перехода в режим гофрировочного плато (3.3) и между бананово-дрейфовыми режимами (3.10), (3.11)

слишком большим и необходимо учитывать изменение фазы под влиянием тороидальной прецессии. Тороидальная прецессия ограничивает смещение частиц величиной  $D_b/\Delta F_T$ . При таком ограничении смещения коэффициент теплопроводности может быть оценен как [37]

$$\chi^{BL} \sim \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{D_b}{\Delta F_T} \right)^2 \frac{1}{\tau_c} \sim v_i \frac{\delta^2 N q R^2}{\sqrt{\varepsilon}} \sim \chi^{RP} \frac{\omega_p^2 \omega_r}{\omega^3}. \quad (3.11)$$

Режимы гофрировочного плато (3.3) и бананово-дрейфовый (3.10), (3.11) охватывают всю совокупность процессов переноса тепловых частиц. Общий вид зависимости коэффициентов (3.3), (3.10) и (3.11) от энергии представлен на рис. 26. Переход от коэффициента теплопроводности  $\chi^{BH} \sim v_i^{-1}$  (3.10) к  $\chi^{BL} \sim v_i$  (3.11) происходит при

$$\omega \sim (\omega_p^4 \omega_r)^{1/3} = \omega_d \sim 2\omega_p. \quad (3.12)$$

Характерная энергия этого перехода для установок с реакторными параметрами — около 30 кэВ (2.91). Из этой оценки видно, что границы по энергии между различными типами переноса лежат очень близко. Поэтому ни один из механизмов не работает отдельно, а реализуется некоторый перенос, включающий все механизмы одновременно.

До сих пор в наших рассуждениях мы не рассматривали резонансные частицы. Однако из-за зависимости прецессии от полоидального угла точки отражения  $\Phi_b$  (1.35) существует доля частиц, для которых тороидальная прецессия обращается в нуль. Ниже показано, что вклад этих частиц в перенос не превышает  $\chi^{RP}$  [34]. Поэтому учитывать резонансные частицы имеет смысл только при достаточно высоких энергиях  $\omega > \omega_p (\omega_r/\omega_p)^{1/3}$ , когда коэффициент (3.11) становится меньше  $\chi^{RP}$ . Поскольку эта граница обычно находится далеко в надтепловой области  $\omega \geq 50$  кэВ, для тепловых частиц нет смысла учитывать резонансные эффекты.

Необходимо отметить, что вклад резонансных частиц в перенос в тепловой области очень чувствителен к радиальному электрическому полю. При  $e\Phi \sim T$  скорость прецессии под действием



электрического поля  $\sim cEq/(\epsilon B)$  в  $R/r$  раз больше скорости тепловой прецессии  $\sim v^2q/(\omega_B r)$ , и поэтому суммарная скорость не обращается в нуль ни при каких значениях  $\vartheta_b$ . Помимо этого эффекта, радиальное электрическое поле, увеличивая скорость прецессии, уменьшает коэффициент теплопроводности (3.11) в  $(v_d + v_E)^2/v_d^2$  раз. При  $e\Phi \sim T$  это уменьшает тепловой поток в  $(R/r)^2$  раз. Полный учет всех этих процессов проведен в § 3.4.

**Диффузия высокоэнергетических частиц.** Для частиц высоких энергий  $\omega \geq \omega_r$  изменение гофрировочной фазы за счет кулоновских столкновений (3.8) мало, и на первый план выходит приращение  $F$ , обусловленное тороидальной прецессией  $\Delta F_T$  (3.6). При  $\Delta F_T \geq 1 \gg \Delta F_r$  частицы в течение времени  $\tau \leq \tau_c$  получают регулярные приращения фазы  $\Delta F_c$ . Полное смещение частицы за время  $\tau_c$  представляет собой сумму  $\tau_c/\tau_b$  смещений  $\Delta r \sim D_b \Sigma \sin F \sim \sim D_b/\sin(\Delta F_T)$ . Максимальное отклонение от магнитной поверхности испытывают резонансные частицы с  $\Delta F_T = N\Delta\varphi_b = k\pi$ . Но и для них смещение ограничено значением  $\Delta r \sim D_b \tau_c/\tau_b$ , поэтому общее выражение для  $\Delta r$  можно записать в виде  $D_b (\sin^2 N\Delta\varphi_b + \tau_b^2/\tau_c^2)^{-1/2}$ . Используя эту оценку, определим транспортный коэффициент в резонансном режиме как

$$\chi^{RE} \sim \sqrt{\epsilon} \frac{\Delta r^2}{\tau_c} \sim \frac{\sqrt{\epsilon} D_b^2 \tau_c^{-1}}{\sin^2(N\Delta\varphi_b) + \tau_b^2/\tau_c^2}. \quad (3.13)$$

Помимо ограничения высоты резонансного пика столкновениями, высота пика может ограничиваться скачками фазы в результате радиального дрейфа  $\Delta F_r$  (3.7). Из-за этого число отражений с постоянной фазой не может превышать  $\Delta F_r^{-1}$ , а полное смещение  $D_b/\Delta F_r \sim (Ndq/dr)^{-1}$ . Аналогичная оценка максимального отклонения от магнитной поверхности была получена в § 1.3 при анализе траекторий банановых частиц в гофрированном магнитном поле токамака. С учетом этого ограничения полное смещение частицы можно оценить как  $D_b (\sin^2 N\Delta\varphi_b + \tau_b^2/\tau_c^2 + \Delta F_r^2)^{-1/2}$ , а коэффициент теплопроводности [34]

$$\chi^{RE} \sim \frac{\sqrt{\epsilon} D_b^2 \tau_c^{-1}}{\sin^2(N\Delta\varphi_b) + \tau_b^2/\tau_c^2 + D_b^2 (Ndq/dr)^2}. \quad (3.14)$$

Полученный коэффициент имеет резонансную структуру. Он мал везде, за исключением узких областей фазового пространства, где  $N\Delta\varphi_b \approx k\pi$ . Поэтому для оценки эффективности потерь более полезным может оказаться интеграл от коэффициента теплопроводности (3.14) в окрестностях каждого резонансного пика:

$$\chi^{RE} \sim \frac{\sqrt{\epsilon} D_b^2 \tau_c^{-1}}{\sqrt{\tau_b^2/\tau_c^2 + D_b^2 (Ndq/dr)^2}} \left[ \frac{dN\Delta\varphi_b}{d\vartheta_b} \right]^{-1}. \quad (3.15)$$

Для нахождения полной теплопроводности надо просуммировать это выражение по всем резонансным пикам. Число резонансных

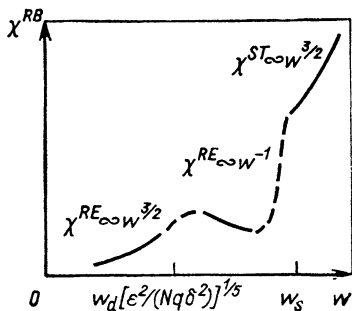


Рис. 27. Зависимость коэффициента переноса высокоэнергетических банановых частиц от энергии:  $w_p (w_r/w_p)^{1/3}$  — минимальная энергия, при которой начинают сказываться резонансные процессы;  $w_d (\varepsilon^2/Nq\delta^2)^{1/5}$  — граница между резонансными плато (3.86) и банановыми (3.87), (3.88) режимами;  $w_s$  — граница перехода в стохастический режим (3.18)

пиков по порядку можно оценить как  $d(N\Delta\varphi_b)/d\vartheta_b$ . Поэтому при суммировании по всем резонансам множитель  $[Nd\Delta\varphi_b/d\vartheta_b]^{-1}$  в формуле (3.15) выпадает, и получаем следующую оценку интегрального транспортного коэффициента в резонансном режиме [34]:

$$\chi^{RE} \sim \chi^{RP} \left( 1 + \left( \frac{\tau_c}{\tau_b} D_b N \frac{dq}{dr} \right)^2 \right)^{-1/2} \sim \chi^{RP} \left( 1 + \frac{w^5}{w_d^5} \frac{\delta^2 N q}{\varepsilon^2} \right)^{-1/2}, \quad (3.16)$$

где  $\chi^{RP}$  — введенный в (3.3) коэффициент теплопроводности в режиме гофрировочного плато.

Формула (3.16) описывает два резонансных режима: резонансный плато-режим, где  $\chi \sim \chi^{RP}$ , и резонансный банановый режим, где  $\chi \sim \sqrt{\varepsilon} D_b (Ndq/dr)^{-1} \tau_c^{-1}$ . Эти названия введены по аналогии с неоклассическими плато- и банановым режимами, поскольку первый коэффициент не зависит от частоты соударений, а второй пропорционален  $v_i$ . Граница перехода между двумя резонансными режимами соответствует энергии

$$w \sim w_d [\varepsilon^2/(Nq\delta^2)]^{1/5} \sim 4w_p. \quad (3.17)$$

При дальнейшем увеличении энергии, когда не только  $\Delta F_T$ , но и  $\Delta F_r$  превысит единицу, случайный сбой фазы гофрировки возникает уже не за счет кулоновских столкновений, а вследствие динамической стохастизации траекторий [13]. Фаза  $F = N\varphi$  оказывается случайной при каждом последовательном отражении, поэтому, как и в режиме гофрировочного плато, частицы испытывают случайные блуждания с  $\Delta r \sim D_b$  и характерным временным шагом  $\tau_b$ . Этот процесс описывает стохастическую диффузию банановых частиц с коэффициентом

$$\chi^{ST} \sim \sqrt{\varepsilon} D_b^2 / \tau_b \sim \chi^{RP}. \quad (3.18)$$

Нижнюю по энергии границу этого режима можно найти из условия  $\Delta F_r \sim 1$ , откуда следует

$$w > w_s = w_r \varepsilon^2 / (\delta^2 N q) = m \varepsilon^3 \omega_B^2 / (N^3 q^5 \delta^2). \quad (3.19)$$

Стохастическая диффузия завершает картину транспортных процессов высокоэнергетических банановых частиц в гофрированном магнитном поле. Общий вид зависимости коэффициентов (3.16) и (3.18) от энергии представлен на рис. 27. Граница перехода от резонансного плато к резонансному банановому режиму  $\omega \sim 4\omega_p$  расположена очень близко к нижней границе существенности резонансных эффектов

$$\omega \sim \omega_p (\omega_r/\omega_p)^{1/3} \sim 3\omega_p. \quad (3.20)$$

Поэтому практически сразу после перехода в резонансный режим транспортный коэффициент начинает падать как  $\omega^{-1}$ . Стохастический режим вообще может реализовываться только для частиц очень высокой энергии ( $\omega \geq 1 \div 100$  МэВ) (3.19), поэтому он существен только для  $\alpha$ -частиц, да и то не во всех областях плазменного шнура.

Необходимо отметить, что частицы высоких энергий типично сильно неоднородно распределены в фазовом пространстве, а в оценках, приведенных выше, предполагалась гладкость функции распределения. Поэтому интегральная оценка (3.16) сильно зависит от того, попадают или не попадают частицы в резонансную область. Правильную оценку можно получить, интегрируя локальный в фазовом пространстве транспортный коэффициент (3.14) с реальной функцией распределения. При этом существенную роль будет играть электрическое поле, поскольку оно дает одно из слагаемых в резонансном условии  $N\Delta\phi_b = k\pi$ . Особенно важна роль электрического поля при относительно невысоких энергиях ( $\omega \leq \omega_r$ ), когда на область фазового пространства, занятого частицами, попадают только одна-две резонансные поверхности.

В заключение отметим, что более подробный анализ резонансного режима, приведенный в приложении П4, показывает, что особенности функции распределения вблизи резонансных точек могут изменить оценку эффективного кулоновского времени  $\tau_c$  (3.2). В результате теплопроводность в резонансном банановом режиме может несколько измениться, сохраняя зависимость от энергии  $\omega^{-1}$ . При этом изменится также и граница перехода между двумя резонансными режимами (3.17).

**Роль гофрировочного переноса банановых частиц.** Для оценки роли гофрировочного переноса банановых частиц сравним коэффициенты ионной теплопроводности в режиме гофрировочного плато (3.3) и неоклассической теплопроводности в режиме плато [12]

$$\frac{\chi^{RP}}{\chi^{NP}} \sim \frac{\delta^2 \rho^2 q^2 N v / (\epsilon^2 R)}{q \rho^2 v / R} \sim \frac{N q \delta^2}{\epsilon^2}. \quad (3.21)$$

Из этого сравнения видно, что если оценивать ионную теплопроводность в токамаке-реакторе по формуле продолженного плато  $\chi^{NP}$ , то вклад гофрировочных процессов окажется малым при

$Nq\delta/\varepsilon \leq 1$ . Если же при сравнении исходить из неоклассической банановой теплопроводности  $\chi^{NB}$ , которая в  $(\omega_b/T)^2$  раз меньше  $\chi^{NP}$ , то относительная роль гофрировочных процессов возрастает в  $(T/\omega_b)^2$  раз по сравнению с оценкой (3.21) и в области рабочих температур реактора  $T \sim Nq\omega_b$  принимает вид

$$\frac{\chi^{RP}}{\chi^{NB}} \sim \frac{Nq\delta^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{T}{\omega_b} \right)^2 \sim \left( \frac{Nq\delta}{\varepsilon} \right)^2 Nq. \quad (3.22)$$

Малость гофрировочной теплопроводности банановых частиц по сравнению с неоклассической может быть обеспечена только при  $Nq\delta/\varepsilon \leq (Nq)^{-1/2} \ll 1$ .

Еще большую роль играет гофрировка для переноса высокоэнергетических частиц. Как видно из рис. 27, при энергиях 50 кэВ — 1 МэВ ионы оказываются в резонансном банановом режиме. Сравнение резонансной банановой диффузии с неоклассической банановой приводит к оценке

$$\frac{\chi^{RE}}{\chi^{NB}} \leq \frac{Nq\delta}{\varepsilon} (Nq)^{3/2} \left( \frac{\omega_r}{\omega} \right)^{1/2}. \quad (3.23)$$

Для энергий  $\omega \sim 100$  кэВ ÷ 1 МэВ резонансная банановая теплопроводность в 3—30 раз больше неоклассической. Если же энергия частиц настолько велика, что они находятся в стохастическом режиме, то частицы бесстолкновительно покидают магнитную систему за  $N^2q^2$  периодов  $\tau_b$ .

Рассмотрим роль гофрировочного переноса для банановых электронов. Для электронов теплопроводность в режиме гофрировочного плато в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз меньше, чем для ионов (3.3). При этом верхняя граница применимости этого режима не зависит от массы и составляет для электронов, как и для ионов,  $\omega_{pe} \sim 10 \div 20$  кэВ. Зато характерная энергия резонансных процессов для электронов очень велика  $\omega_{re} \sim (m_i/m_e)\omega_{ri} \sim 100$  МэВ. Поэтому для электронов практически не имеют применимости резонансный и стохастический режимы. Минимальная энергия, начиная с которой эти процессы становятся существенными, для электронов составляет  $\omega_{pe}(\omega_{re}/\omega_{pe})^{1/3} \sim 1$  МэВ. При энергиях  $E \leq 1$  МэВ вся совокупность гофрировочного переноса банановых электронов описывается режимом гофрировочного плато и двумя бананово-дрейфовыми режимами. При этом максимум коэффициента теплопроводности достигается для энергий  $\omega \sim \omega_d \sim 7\omega_p \sim 100$  кэВ. Значение коэффициента теплопроводности в максимуме составляет  $\chi_e^{RP} (\omega_{re}/\omega_{pe})^{2/3} \sim (20 \div 100) \chi_e^{RP} \leq \chi_i^{RP}$  и не превышает, таким образом, значения коэффициента гофрировочной теплопроводности банановых ионов.

С учетом этих замечаний в дальнейшем при строгом анализе процессов переноса ограничимся, как и в случае локально-запертых частиц, рассмотрением только ионной компоненты плазмы. При этом основное внимание будет уделяться установкам с отно-

нительно низкой гофрировкой  $Nq\delta \ll \varepsilon$ . В § 3.2 рассмотрено бананово-дрейфовое кинетическое уравнение. Основная цель этого исследования — показать связь оценок теплопроводности (3.10), (3.11) с коэффициентами, полученными в [11, 38, 39]. Обобщение бананово-дрейфового кинетического уравнения и расчет транспортных коэффициентов единым методом сделаны в § 3.3 и 3.4.

### 3.2. Процессы переноса в бананово-дрейфовом режиме

**Бананово-дрейфовое кинетическое уравнение.** В диапазоне энергий  $\omega_p \ll \omega \ll \omega_r$  фаза гофрировки мало меняется за время между отражениями  $\tau_b$ , поскольку набег фазы за счет всех трех процессов (3.6) — (3.8) в данном диапазоне значительно меньше единицы. В этом случае дрейфовое кинетическое уравнение можно проинтегрировать по полному времени оборота по замкнутой орбите и свести к бананово-дрейфовому кинетическому уравнению [28]

$$\frac{dr}{dt} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{d\varphi_0}{dt} \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} = \frac{1}{2\tau_b} \oint \text{St}(f) \frac{dl}{v_{\parallel}}, \quad (3.24)$$

где  $r$  и  $\varphi_0$  — радиальная и тороидальная координаты ведущего центра банановой орбиты ( $\varphi_0 = \varphi - q\vartheta$  — тороидальный угол точки пересечения силовой линии с горизонтальной плоскостью симметрии токамака). При движении ведущего центра сохраняется продольный адиабатический инвариант

$$J_b = \oint v_{\parallel} dl, \quad (3.25)$$

а траектории определяются уравнениями

$$\frac{dr}{dt} = \frac{q}{2\omega_B \tau_b} \frac{\partial J_b}{\partial \varphi_0}; \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = - \frac{q}{2\omega_B \tau_b} \frac{\partial J_b}{\partial r}. \quad (3.26)$$

Вывод этих уравнений полностью аналогичен выводу соответствующих уравнений для локально-запертых частиц в § 2.2. В операторе столкновений в меру узости области фазового пространства, занятого банановыми частицами, сохраним только член, описывающий угловое рассеяние. Используя ту же процедуру, что и в § 2.2, преобразуем правую часть уравнения (3.24) к виду

$$\frac{mv_i(v)}{2\tau_b B} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( J_b \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right). \quad (3.27)$$

Уравнение (3.24) с оператором столкновений (3.27) использовалось ранее для исследования бананово-дрейфового переноса в [38, 39]. Однако полученные там значения коэффициента теплопроводности отличаются от оценок (3.10), (3.11) и результатов [33, 40]. Различие возникло из-за разных способов вычисления  $dr/dt$  или, что то же самое, разных способов вычисления гофрировочных поправок к  $J_b$ .

**Вычисление гофрировочных поправок к  $J_b$ .** Без учета гофрировки выражение для продольного адиабатического инварианта

банановых частиц не зависит от тороидального угла  $\varphi_0$  и имеет вид

$$J_b = J_0 = 16qR \sqrt{\frac{\mu B_0 \varepsilon}{m} \left[ E \left( \sin \frac{\vartheta_b}{2} \right) - \cos^2 \frac{\vartheta_b}{2} K \left( \sin \frac{\vartheta_b}{2} \right) \right]}. \quad (3.28)$$

При малой глубине гофрировки  $\delta$  продольный инвариант можно представить в виде  $J_b = J_0 + J_1$ . Поправка  $J_1$ , пропорциональная  $\delta$ , является суммой двух членов  $J_1 = J_1^I + J_1^V$ . Первый возникает из-за изменения длины силовой линии в магнитном поле с гофрировкой по сравнению с магнитным полем без гофрировки. Второй связан с возмущением продольной скорости. В [38, 39] был учтен только вклад  $J_1^I$ , и в результате важные эффекты, в действительности определяющие перенос, были потеряны.

Рассмотрим каждую из поправок отдельно. Вычислим сначала  $J_1^I$ . С учетом гофрировки выражение, описывающее элемент длины силовой линии, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} dl &= \left[ \left( \frac{B_\varphi}{B_\vartheta} \right)^2 + 1 + \left( \frac{B_r}{B_\vartheta} \right)^2 \right] r d\vartheta \approx \\ &\approx \left( 1 + 2 \frac{\tilde{B}_\varphi}{B_0} - 2 \frac{\tilde{B}_\vartheta}{B_p} + \frac{\varepsilon^2}{q^2} \right)^{1/2} q(r) R d\vartheta, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где  $r$  берется на силовой линии, отклоняющейся из-за гофрировки от среднего значения:

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \int R \tilde{B}_r d\varphi / B_0 = r_0 + R_0 \int \delta_r(r, \vartheta) \sin(N\varphi) d\varphi = \\ &= r_0 - \delta_r(r, \vartheta) \cos(N\varphi_0 + Nq\vartheta) R_0 / N. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь интегрирование по  $\varphi$  проведено вдоль невозмущенной силовой линии  $\varphi = \varphi_0 + q\vartheta$  с учетом плавной зависимости  $\delta_r(r, \vartheta)$  от  $\vartheta$ . Заметим, что, как отмечено в [11], аналогичное интегрирование в [38, 39] выполнено неверно. Константы интегрирования там выбраны таким образом, что  $r = r_0$  при  $\vartheta = 0$ , т. е. магнитные поверхности не искажаются гофрировкой в плоскости  $\vartheta = 0$ . Ошибочность такого предположения видна из рассмотрения поведения силовых линий в пределе очень низкого тока плазмы ( $q \rightarrow \infty$ ).

Пренебрегая малыми членами  $B_p^2/B_0^2$  и сохраняя только линейные по гофрировке поправки, преобразуем выражение (3.29) к виду

$$\begin{aligned} dl &\approx \left[ 1 + \delta \cos(N\varphi) - \frac{q}{\varepsilon} \delta_\vartheta \sin(N\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R \delta_r}{Nq} \frac{dq}{dr} \cos(N\varphi) \right] Rq(r_0) d\vartheta. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Здесь использованы обозначения для полоидальной и радиальной гофрировок, введенные в § 1.1. Подставляя теперь длину (3.31) в определение продольного адиабатического инварианта и учитывая

то, что  $v_{\parallel}$  — четная функция  $\vartheta$ , получаем

$$J_1' = 2qRv \sqrt{\varepsilon} \int_{-\vartheta_b}^{\vartheta_b} \sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_b} \cos(Nq) \vartheta \, d\vartheta \left[ \left( \delta - \frac{R}{Nq} \frac{dq}{dr} \delta_r \right) \times \right. \\ \left. \times \cos(N\varphi_0) - \frac{q}{\varepsilon} \delta_b \sin(N\varphi_0) \right]. \quad (3.32)$$

Вычисляя интеграл по  $\vartheta$  с помощью разложения по малому параметру  $(Nq)^{-1}$ , приходим окончательно к следующему выражению:

$$J_1' = \frac{4Rv}{N} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon \sin \vartheta_b}{Nq}} \cos \left( Nq\vartheta_b - \frac{\pi}{4} \right) \times \\ \times \left[ \left( \delta - \frac{R}{Nq} \frac{dq}{dr} \delta_r \right) \cos(N\varphi_0) - \frac{q}{\varepsilon} \delta_b \sin(N\varphi_0) \right]. \quad (3.33)$$

Вычислим теперь поправку  $J^{v_1}$ , обусловленную модуляцией продольной скорости:

$$J_1^v = 2qRv \sqrt{\varepsilon} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_b + \frac{\delta}{\varepsilon} \cos(Nq\vartheta + N\varphi_0)} \, d\vartheta - J_0, \quad (3.34)$$

где  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — пологидальные углы в точках отражения банановых частиц в гофрированном магнитном поле. Разобьем интеграл на три области  $(\vartheta_1, -\vartheta_3)$ ,  $(-\vartheta_3, \vartheta_3)$  и  $(\vartheta_3, \vartheta_2)$ , где  $\vartheta_3 = \vartheta_b - \xi/(Nq)$ ;  $\xi$  — малый параметр, удовлетворяющий неравенству  $Nq\delta/(\varepsilon \sin \vartheta_b) \ll \xi \ll 1$ . Такие  $\xi$  существуют, если  $Nq\delta \ll \varepsilon$ , что мы предполагаем выполненным. В первой и третьей областях разложим подынтегральное выражение в ряд по  $\vartheta - \vartheta_b$  с точностью до членов первого порядка. В результате интегрирования этих выражений получим

$$\int_{\vartheta_1}^{-\vartheta_3} + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_2} \approx \frac{4}{3} \left( \frac{\xi}{Nq} \right)^{3/2} \sqrt{\sin \vartheta_b} \left( 1 + \frac{3Nq\delta \cos(N\varphi_0) (\cos Nq\vartheta_b)}{\xi \sin \vartheta_b} \right). \quad (3.35)$$

Интеграл по второй области приблизительно представляется как

$$\int_{-\vartheta_3}^{\vartheta_3} \sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_b} + \frac{\delta}{2\varepsilon} \frac{\cos(Nq\vartheta + N\varphi_0)}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_b}} \, d\vartheta. \quad (3.36)$$

Интегрируя это выражение с учетом малости  $\xi$  и наличия быстро осциллирующего множителя  $\cos(Nq\vartheta + N\varphi_0)$  во втором члене, после суммирования с вкладом от двух других областей окончательно получаем

$$J_1^v = 2qRv \frac{\delta(r, \vartheta_b) \sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon Nq \sin \vartheta_b}} \cos(N\varphi_0) \cos \left( Nq\vartheta_b - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.37)$$

Сравнение  $J_1'$  (3.33) и  $J^{v_1}$  (3.37) показывает, что  $J_1'$  как минимум в  $N$  раз меньше, чем  $J^{v_1}$ . Поэтому в дальнейшем анализе эту поправку учитывать не будем.

**Решение дрейфово-кинетического уравнения.** Скорость радиального дрейфа ведущего центра банановой орбиты найдем, подставляя  $J_1$  (3.37) в первую из формул (3.26),

$$\frac{dr}{dt} = \frac{v_d \delta(r, \vartheta_b)}{\varepsilon K} \sqrt{\frac{\pi N q}{2 \sin \vartheta_b}} \sin(N\varphi_0) \cos\left(Nq\vartheta_b - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.38)$$

Скорость тороидальной прецессии можно вычислить, ограничиваясь нулевым приближением  $J_0$  (3.28):

$$u_T = R \frac{d\varphi_0}{dt} = R \frac{\Delta\varphi_b}{\tau_b} = \frac{q}{\varepsilon} \left[ -\frac{cE_r}{B_0} + \frac{v^2}{\omega_B R} \left( 2S \left( \frac{E}{K} - \cos^2 \frac{\vartheta_b}{2} \right) + \frac{E}{K} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.39)$$

Здесь и ниже  $E$  и  $K$  — полные эллиптические интегралы от  $\sin(\vartheta_b/2)$ . Помимо изменения  $r$  и  $\vartheta_0$ , на траектории меняется также и  $\vartheta_b$ . Действительно, поскольку  $\mu$  и  $\omega$  сохраняются на траектории, то из определения  $\vartheta_b$  (1.34) следует

$$\frac{d\vartheta_b}{dt} = \frac{1}{r} \left( \operatorname{ctg} \vartheta_b + \frac{v_E}{v_d} \right). \quad (3.40)$$

Поэтому движение ведущего центра по  $r$  обязательно сопровождается изменением фазы  $Nq\vartheta_b$ . Переходя теперь в операторе столкновений к переменной  $\vartheta_b$ , найдем уравнение для поправки к максвелловской функции распределения  $f_1 = \bar{f} - f_m$ :

$$\sin N\varphi_0 \cos\left(Nq\vartheta_b - \frac{\pi}{4}\right) u_r \left[ \frac{df_m}{dr} + \frac{q}{r} \left( S\vartheta_b + \operatorname{ctg} \vartheta_b + \frac{v_E}{v_d} \right) \frac{\partial f_1}{\partial(q\vartheta_b)} \right] + \frac{u_T}{R} \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_0} = \frac{4v_i(v)}{\varepsilon K \sin \vartheta_b} \frac{\partial}{\partial\vartheta_b} \left( \frac{E - K \cos^2(\vartheta_b/2)}{\sin \vartheta_b} \frac{\partial f_1}{\partial\vartheta_b} \right), \quad (3.41)$$

где  $u_r = [v_d \delta(r, \vartheta_b) / (\varepsilon K)] [\pi N q / (2 \sin \vartheta_b)]^{1/2}$ ;  $v_d = v^2 / (2\omega_B R)$ . Второй член в квадратных скобках, описывающий изменение  $q\vartheta_b$  на траектории, сильно затрудняет решение кинетического уравнения. Поэтому обычно бананово-дрейфовое уравнение рассматривают без учета этого слагаемого [11, 33, 40]. Необходимо, однако, учитывать, что отбрасывание этого члена приводит к сужению области применимости упрощенного уравнения. Из анализа, сделанного в § 3.1, следует, что изменение гофрировочной фазы  $Nq\vartheta_b$  необходимо учитывать при  $\omega \geq \omega_d [e^2 / (Nq\delta^2)]^{1/5}$  (3.17), что соответствует переходу к резонансному банановому режиму, где становится заметным несохранение  $J_b$  [41].

Подробный анализ роли  $Nd(q\vartheta_b)/dt$  сделан в § 3.3, а сейчас рассмотрим упрощенное бананово-дрейфовое уравнение [11, 33, 40], соответствующее предположению  $J_b = \text{const}$ :

$$\sin(N\varphi_0) \cos\left(Nq\vartheta_b - \frac{\pi}{4}\right) u_r \frac{df_m}{dr} + \frac{u_T}{R} \frac{df_1}{\partial\varphi_0} = \text{St}(f_1), \quad (3.42)$$

где оператор соударений имеет тот же вид, что и в уравнении (3.41). Наличие быстро осциллирующего множителя позволяет искать решение уравнения (3.42) в виде



$$f_1 = [A(\vartheta_b) \sin(N\varphi_0) + B(\vartheta_b) \cos(N\varphi_0)] \cos(Nq\vartheta_b - \pi/4), \quad (3.43)$$

где  $A(\vartheta_b)$  и  $B(\vartheta_b)$  — плавные функции. Поэтому при дифференцировании по  $\vartheta_b$  в первом приближении по  $1/(Nq)$  можно дифференцировать только множитель  $\cos(Nq\vartheta_b - \pi/4)$ . Подставляя  $f_1$  вида (3.43) в уравнение (3.42), с учетом последнего замечания получаем

$$A(\vartheta_b) = \frac{v_c u_r}{v_c^2 + (Nu_T/R)^2} \frac{df_m}{dr};$$

$$B(\vartheta_b) = A(\vartheta_b) Nu_T/(Rv_c), \quad (3.44)$$

где  $v_c = \frac{4v_i(v) N^2 q^2}{\varepsilon \sin^2 \vartheta_b} \left( \frac{E}{K} - \cos^2 \frac{\vartheta_b}{2} \right)$  — эффективная частота столкновений банановых частиц по отношению к изменению гофрированной фазы. Отметим, что предположение о плавности  $A(\vartheta_b)$  справедливо, если характерная ширина функций  $A(\vartheta_b)$  и  $B(\vartheta_b)$  (3.44) больше  $(Nq)^{-1}$ , что выполняется в области применимости бананово-дрейфового режима  $\omega_p < \omega < \omega_p (\omega_r/\omega_p)^{1/3}$ . Особенности, связанные с резонансным характером  $A(\vartheta_b)$  вблизи  $u_T=0$ , рассмотрены в § 3.3 и в приложении П4.

**Радиальные потоки в бананово-дрейфовом режиме.** Усредненные по магнитной поверхности потоки банановых частиц определяются выражениями (2.31), в которых дрейфовая скорость должна быть заменена радиальной скоростью ведущего центра банановой орбиты (3.38):

$$\left[ \begin{array}{c} \Gamma \\ Q \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q\varphi_0}{2\pi} \int_{\omega_p}^{\omega_r} 2\pi d\omega_k \times$$

$$\times \int_{\omega_k(1-\varepsilon)/B_0}^{\omega_k/B_0} \frac{B f_1 u_r \sin(N\varphi_0) \cos(Nq\vartheta_b - \pi/4)}{m^2 v_{\parallel}} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \omega_k \end{array} \right] d\mu. \quad (3.45)$$

Интегрирование по  $\vartheta$  и  $\varphi_0$  в этом выражении может быть проведено с использованием  $f_1$  (3.43) в общем виде. Из-за наличия множителя  $\sin(N\varphi_0)$  в дрейфовой скорости (3.38) часть  $f_1$ , пропорциональная  $\cos(N\varphi_0)$ , при интегрировании исчезает. В результате радиальные потоки выражаются только через коэффициент  $A(\vartheta_b)$  (3.44):

$$\left[ \begin{array}{c} \Gamma \\ Q \end{array} \right] = - \frac{1}{m^{3/2} \sqrt{\varepsilon}} \int_{\omega_p}^{\omega_r} \frac{d\omega_k}{\sqrt{\omega_k}} \times$$

$$\times \int_{\omega_k(1-\varepsilon)/B_0}^{\omega_k/B_0} \frac{B u_r^2 K \cos^2(Nq\vartheta_b - \pi/4) v_c}{(v_c^2 + u_T^2 N^2/R^2)} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \omega_k \end{array} \right] \frac{df_m}{dr} d\mu. \quad (3.46)$$

Переходя в этом интеграле от  $\mu$  к  $\vartheta_b$  и учитывая, что множитель  $\cos^2(Nq\vartheta_b - \pi/4)$  с точностью до слагаемых порядка  $(Nq)^{-1}$  можно заменить средним значением  $1/2$ , записываем радиальные потоки в виде

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ Q \end{bmatrix} = - \frac{\pi NqR^2}{m^{3/2} \sqrt{\varepsilon}} \int_{\omega_p}^{\omega_p(\omega_r/\omega_p)^{1/2}} \Psi_{\nu_e} \begin{bmatrix} \omega_k^{1/2} \\ \omega_k^{3/2} \end{bmatrix} \frac{df_m}{dr} d\omega_k, \quad (3.47)$$

где

$$\Psi = \int_0^\pi \frac{\delta^2(r, \vartheta_b) \sin^2 \vartheta_b (E - K \cos^2(\vartheta_b/2)) d\vartheta_b}{\left[ \frac{4\nu_i(v) NqR}{v_d} \left( E - K \cos^2 \frac{\vartheta_b}{2} \right) \right]^2 + \left[ K \frac{v_E}{v_d} + 4S \left( E - K \cos^2 \frac{\vartheta_b}{2} \right) + 2E - K \right]^2 \sin^4 \vartheta_b}.$$

Полученные формулы описывают все режимы бананово-дрейфового переноса, возникающие из решения упрощенного кинетического уравнения (3.42). Разные выражения для потоков, найденные в [33, 40 и в 11], связаны с различными оценками интеграла  $\Psi$ . Вклад в интеграл  $\Psi$  определяется в основном тремя областями:  $|\vartheta_b| \leq \pi/2$ , где имеется максимум  $\delta(r, \vartheta_b)$ ,  $|\vartheta_b - \pi| \ll 1$ , где знаменатель дроби имеет минимум из-за  $\sin \vartheta_b \rightarrow 0$ , и окрестности резонансных областей, где  $u_T \rightarrow 0$ . При относительно низких энергиях  $\omega \leq \omega_p (\omega_r/\omega_p)^{1/3}$ , которые рассматриваются в этом параграфе, резонансные области не дают существенного вклада. Вклад от области  $\vartheta_b \sim \pi$  может быть существен только при низких частотах соударений  $\nu_i NqR \ll |v_E + v_d|$ . Для  $|\vartheta_b - \pi| \ll 1$  в подинтегральном выражении можно воспользоваться разложением по  $x = \pi - \vartheta_b$

$$\Psi_\pi \approx v_d^2 \delta_\pi^2 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(4NqR\nu_i)^2 + (-v_E K + v_d(4S + 2 - K))^2 x^4}. \quad (3.48)$$

где  $\delta_\pi = \delta(r, \pi)$ ;  $K = K(\cos(x/2)) \approx \ln(8/x)$ . Ввиду слабой зависимости  $K(x)$  будем считать величину  $K$  постоянной и  $K_0 \approx \ln(8/x_0)$ , где  $x_0 \approx 2[(NqR\nu_i)/(-v_E K_0 + v_d(4S + 2 - K_0))]^{1/2}$ . После такой замены интеграл (3.48) легко вычисляется:

$$\Psi_\pi \approx \frac{\pi \delta_\pi^2 \sqrt{2} v_d^2}{8 (NqR\nu_i(v))^{1/2} [-K_0 v_E + v_d(4S + 2 - K_0)]^{3/2}}. \quad (3.49)$$

Вклад от области  $|\vartheta| \leq \pi/2$  вычисляется только численно. Воспользовавшись моделью зависимости гофрировки от угла  $\delta(r, \vartheta) \approx \delta_0(r) \exp(-\vartheta^2/2)$ , можно получить приближенно для всей

области частот соударений [30]

$$\Psi_0 \approx \frac{v_d^2}{(NqRv_i(v))^2} \frac{0,04\delta_0^2}{A^2 + 0,4A + 0,2}, \quad (3.50)$$

где  $A = [-v_E + (0,9S + 0,4)v_d]/[NqRv_i(v)]$ .

Чтобы оценить роль областей  $|\vartheta - \pi| \ll 1$  и  $|\vartheta| \leq \pi/2$ , сравним величины  $\Psi_\pi$  и  $\Psi_0$  при низких частотах соударений:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_\pi}{\Psi_0} &\approx \frac{\sqrt{2} \pi \delta_\pi^2 [-v_E + (0,9S + 0,4)v_d]^2}{0,32\delta_0^2 (NqRv_i)^{1/2} [-K_0 v_E + v_d (4S + 2 - K_0)]^{1/2}} \approx \\ &\approx \frac{\delta_\pi^2}{\delta_0^2} \frac{15}{K_0^{1/2}} \left| \frac{v_E - v_d}{NqRv_i} \right|^{1/2}. \end{aligned}$$

Типичное отношение гофрировок на внутреннем и внешнем обводах тора колеблется в диапазоне  $\delta_\pi/\delta_0 \sim 0,1 \div 0,2$  (см. рис. 3, 6). Поэтому отношение вкладов от банановых частиц, отражающихся на внутреннем и внешнем обводах тора, можно оценить как

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_\pi}{\Psi_0} &\sim (0,05 - 0,2) \left| \frac{v_E}{v_d} - 1 \right|^{1/2} \left( \frac{\omega}{\omega_d} \right)^{3/4} \leq \\ &\leq (0,05 - 0,2) \left| \frac{v_E}{v_d} - 1 \right|^{1/2} \left( \frac{\varepsilon^2}{Nq\delta^2} \right)^{1/4}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Последняя оценка сделана здесь исходя из максимальной энергии (3.17), описываемой уравнением (3.42). Соотношение (3.51) показывает, что для умеренных значений напряженности электрического поля  $\Psi$  не превышает  $\Psi_0$ . Следует отметить, что граничная энергия (3.17) достаточно велика, поэтому даже для термоядерной плазмы максимальная оценка  $\Psi_\pi/\Psi_0$  относится к существенно надтепловой области, где предположение  $v_E \gg v_d$  вряд ли оправдано.

В обзоре [11] был учтен только вклад от внутреннего обвода тора  $\Psi_\pi$  (3.49). Это привело к оценке бананово-дрейфового переноса коэффициентом  $\chi^{BD} \sim v_i^{1/2}$ . Как показано выше, в типичных условиях токамака  $\Psi_\pi < \Psi_0$ , поэтому теплопроводность  $\chi^{BD} \sim v_i^{1/2}$  не дает существенного вклада в радиальные потоки. Этот вклад может быть заметным только для надтепловых частиц при  $\delta_\pi \leq \delta_0/2$  и должен при необходимости добавляться к переносу, обусловленному внешним обводом тора. Переход к режиму более низких частот соударений с  $\chi \sim v_i$  в [11] также сделан только с учетом области  $|\vartheta - \pi| \ll 1$ . Однако анализ этого случая в рамках уравнения (3.42) вообще не имеет смысла, поскольку оно теряет силу из-за неучета изменения  $Nq\vartheta_b$  на траектории.

Здесь мы ограничились выражением для потоков в виде интегралов (3.47) с  $\Psi$ , определяемой формулой (3.50). Интегриро-

вание выражений (3.47) вряд ли имеет смысл из-за узости области применимости бананово-дрейфового уравнения в энергетическом пространстве. К тому же нижняя граница этого режима типично попадает в тепловую область  $\omega_p \sim 10 \div 20$  кэВ, поэтому значительная доля частиц оказывается в режиме гофрировочного плато. Для описания гофрировочной теплопроводности банановых частиц при  $T \sim \omega_p$  необходимо использовать выражения, описывающие плавный переход от режима гофрировочного плато к бананово-дрейфовому режиму. Эти формулы получены в § 3.3 на основе обобщения бананово-дрейфового кинетического уравнения.

### 3.3. Обобщение бананово-дрейфового кинетического уравнения

**Разностное кинетическое уравнение.** Если время движения частиц по банановой траектории  $\tau$  сравнимо или превышает характерное время движения ведущего центра банановой орбиты, то дрейфовые уравнения не могут быть усреднены по банановой орбите, как это было сделано при получении бананово-дрейфового кинетического уравнения (3.24). В этом случае для анализа переносов необходимо использовать дрейфовое уравнение (2.21), усредненное по циклотронному вращению и не имеющее ограничений на отношение бананового орбитального времени  $\tau$  к характерному времени движения ведущего центра. Дрейфовое кинетическое уравнение включает, однако, и перенос в аксиально-симметричных системах, что усложняет решение для гофрировочных поправок. Чтобы выделить уравнение для гофрировочной поправки в явном виде, проинтегрируем линеаризованное дрейфовое кинетическое уравнение для  $f_1 = \bar{f} - \bar{f}_m$  по траектории между точками отражения банановой частицы [10]:

$$f_1(r_{n+1}) - f_1(r_n) - \int v_{\parallel}^{-1} St(f_1) dl = - \int v_{\parallel}^{-1} \mathbf{v}_d dt \nabla f_m, \quad (3.52)$$

где  $r_n$  и  $r_{n+1}$  — координаты частицы в двух последовательных точках отражения. Градиент  $f_m$  вынесен из-под знака интеграла, поскольку изменение  $r$  на траектории мало по сравнению с характерным масштабом изменения  $df_m/dr$ .

Выражение (3.52), вообще говоря, не уравнение, поскольку функция распределения в точке отражения  $r_{n+1}$  определяется через интеграл столкновений по всей траектории. Известно, однако, что при определенных условиях выражение (3.52) может быть сведено к бананово-дрейфовому уравнению. Эти условия следующие:

а) значения функции распределения после одного отражения слабо различаются, или, другими словами,  $f_1(r_{n+1}) - f_1(r_n) \approx \Delta \mathbf{g} \nabla f_1$ ;

б) часть функции распределения  $f_1$ , представляющая собой решение дрейфового кинетического уравнения в аксиально-симметричном случае и описывающая неоклассический перенос, не принимается во внимание в операторе столкновений;

в) добавка к функции распределения  $f_\delta$ , описывающая гофрировочный перенос, слабо изменяется за время пролета между точками отражения:

$$\int \text{St}(f_\delta) dl/v_{\parallel} \approx \text{St}(f_\delta) \tau_b;$$

г) величины  $v_d/v_{\parallel}$  на силовой линии и на истинной траектории  $L$  слабо различаются:

$$\int_L v_{dr} dl/v_{\parallel} \approx \int v_d dl/v_{\parallel} = \Delta r.$$

Чтобы выделить уравнение для  $f_\delta$ , достаточно только условия «б». Другие условия, определяющие малость дрейфа за время между отражениями по сравнению с размерами неоднородности магнитного поля, «а» и «г», а также слабое изменение  $f_\delta$  за время  $\tau_b$  «в», могут нарушаться. Более того, условие «б» также может быть невыполненным. Но при этом в столкновительном операторе уравнения (3.52) появятся дополнительные члены, описывающие неоклассический перенос. Ситуация здесь точно такая же, как в дрейфовом кинетическом уравнении, в котором классический перенос описывается модификацией оператора столкновений [42]. Если неоклассический перенос не учитывается, то должна быть сохранена обычная форма оператора столкновений (3.27).

Таким образом, для построения уравнения, обобщающего бананово-дрейфовое на случай нарушения условий «а», «в» и «г», интеграл

$$\int \text{St}(f_\delta) dl/v_{\parallel} \quad (3.53)$$

должен быть вычислен по пролету между точками отражения и выражен через  $f_\delta(r_n)$ . Значение  $f_\delta$  между точками отражения, появляющееся в выражении (3.53), может быть найдено из дрейфового уравнения (2.21). Как было показано в § 1.2 при анализе дрейфовых траекторий банановых частиц для случая  $Nq\delta \ll \epsilon$ , правая часть (3.52) может быть представлена в виде

$$D_b \sin \left[ N\varphi_0 \pm \left( Nq\vartheta_b - \frac{\pi}{4} \right) \right] \tau_b \frac{df_m}{dr}. \quad (3.54)$$

При  $Nq \gg 1$   $\sin[N\varphi_0 \pm (Nq\vartheta_b - \pi/4)]$  является собственной функцией оператора столкновений (3.27), (3.41). Поэтому гофрировочную поправку можно искать в виде

$$f_\delta = A(\vartheta_b) \exp(iNq\vartheta_b), \quad (3.55)$$

где  $A(\vartheta_b)$  — медленно меняющаяся функция по сравнению с  $\exp(iNq\vartheta_b)$ . Как будет видно из дальнейшего, в резонансных случаях  $A(\vartheta_b)$  имеет вид узких пиков. Тогда условие плавности  $A(\vartheta_b)$  предполагает, что  $1/(Nq)$  мало по сравнению с шириной пика  $\Delta\vartheta_b$ . В основном тексте будем предполагать ширину пика не слишком узкой  $\Delta\vartheta_b \gg 1/(Nq)$ , а выделение быстро осциллирующего множителя  $\exp(iNq\vartheta_b)$  оправданным. Детальный анализ резонансного переноса вынесен в приложение П4. Там показано, что узкие пики

с  $\Delta\vartheta_b \lesssim 1/(Nq)$  могут реализовываться только при относительно низкой гофрировке  $\delta \lesssim \varepsilon(Nq)^{-3/2}$ . При этом коэффициент переноса в резонансном банановом режиме несколько возрастет.

При  $\Delta\vartheta_b \gg 1/(Nq)$  оператор столкновений для функций вида (3.55) может быть записан в  $\tau$ -приближении:

$$\text{St}(f_\delta) = - |v_\parallel| \frac{2v_i(v) N^2 q^2}{\varepsilon^{3/2} v} \frac{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \vartheta_b}}{\sin^2 \vartheta_b} f_\delta = - \frac{|v_\parallel|}{L_c} f_\delta. \quad (3.56)$$

Рассматривая поведение  $f_\delta$  между точками отражения, можно считать смещение частицы относительно силовой линии равным нулю, поскольку гофрировочное смещение (1.40) набирается в основном на расстоянии  $l \lesssim R/N$  от точки отражения. Такое приближение верно при  $L_c \gg R/N$ , или, другими словами, для частиц с не слишком низкой энергией  $\omega \gtrsim \omega_p(Nq)^{-1/2}$  (3.5). Таким образом, кинетическое уравнение между точками отражения может быть записано в виде

$$\frac{1}{Rq} \frac{df}{d\vartheta} + \frac{f}{L_c(\vartheta)} = 0. \quad (3.57)$$

Здесь и далее индекс  $\delta$  у гофрировочной поправки к функции распределения опущен. Подставив решение этого уравнения в формулу (3.53), выразим интеграл от оператора столкновений через  $f(r_n)$ :

$$\int \frac{\text{St}(f)}{v_\parallel} dl = -f(r_n) \int_{-\vartheta_b}^{\vartheta_b} \frac{qRd\vartheta}{L_c(\vartheta)} \exp \left\{ - \int_{\vartheta_b}^{\vartheta} \frac{qRd\vartheta'}{L_c(\vartheta')} \right\} = f(r_n) (e^{-g} - 1), \quad (3.58)$$

где  $g = v_c \tau_b = \frac{8\sqrt{2} v_i(v) N^2 q^3 R}{\varepsilon^{3/2} v \sin^2 \vartheta_b} \left( E - K \cos^2 \frac{\vartheta_b}{2} \right)$ . В результате

выражение (3.52) преобразуется к разностному кинетическому уравнению

$$f(r_{n+1}) = f(r_n) \exp(-g) + D_\pm(r_n) df_m/dr, \quad (3.59)$$

где связь между  $r_{n+1}$  и  $r_n$  определяется траекторией вершин банановых орбит (1.45), а индексы (+) и (-) у  $D$  соответствуют отражению в верхней и нижней вершинах банановой орбиты.

**Решение разностного уравнения.** Формальное решение разностного уравнения (3.59) представляет собой бесконечную сумму

$$f(r_n) = \sum_{m=-\infty}^n \exp[g(m-n)] D_\pm(r_m) \frac{df_m}{dr}.$$

Используя конкретный вид радиального смещения  $D$  (1.41) и предполагая, что отклонение от точки  $r_n$  по радиусу не слишком велико, так что амплитуду смещения  $D_b$  (1.42) и  $df_m/dr$  можно

считать постоянными, запишем  $\dot{f}$  в виде

$$\dot{f}(r) = D_b \frac{df_m}{dr} \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-mg) \sin F_m. \quad (3.60)$$

Фазы  $F_m = N\varphi_{0m} + (-1)^m [N(q\vartheta_b)_m - \pi/4]$  определяются разностным уравнением для траектории, оканчивающейся в  $r$ :

$$\left. \begin{aligned} r_{m+1} &= r_m - D_b \sin F_m; \\ F_{m+1} &= F_m - (-1)^m [2Nq(r_{m+1})\vartheta_b(r_{m+1}) - \pi/2] - N\Delta\varphi_b(r_{m+1}). \end{aligned} \right\} (3.61)$$

Зависимости  $q(r)\vartheta_b(r)$  и  $\Delta\varphi_b(r)$  описывают изменение длины банановой орбиты и тороидальной прецессии при переходе с одного радиуса на другой. Характер движения частиц существенно зависит от соотношения между производными от этих величин. В токамаках типично [см. формулу (3.40)]

$$\frac{d(q\vartheta_b)}{dr} = \vartheta_b \frac{dq}{dr} + \frac{q}{r} \left( \operatorname{ctg} \vartheta_b + \frac{v_E}{v_d} \right) \gg \frac{d}{dr} (\Delta\varphi_b), \quad (3.62)$$

поскольку сами величины сильно различаются ( $q\vartheta_b \gg \Delta\vartheta_b$ ). Отметим, что связь координат точек отражения в амбиполярных аксиально-несимметричных ловушках подобна уравнениям (3.61) [35, 36]. Однако в амбиполярных ловушках основной эффект — это изменение скорости прецессии.

Сравним теперь области применимости разностного уравнения (3.59) и бананово-дрейфового кинетического уравнения (3.41). Уравнение (3.59) применимо для описания возмущений, которые накапливаются только на коротких отрезках траекторий, как, например, в случае гофрировочного возмущения  $R/N \ll qR$ . Бананово-дрейфовое кинетическое уравнение в этом смысле значительно шире и позволяет описывать любые возмущения. Однако для его использования необходимо соблюсти условия «а», «в» и «г», которые могут быть записаны как  $g \ll 1$  и  $|F_{m+2} - F_m| \ll 1$ . Последнее неравенство с учетом уравнений (3.61) эквивалентно условиям  $D_0 N d(q\vartheta_b)/dr \ll 1$  и  $N\Delta\varphi_b \ll 1$ . Тот факт, что уравнение (3.59) не ограничено этими неравенствами, расширяет область его применимости на режим гофрировочного плато  $g \geq 1$ , резонансные режимы  $N\Delta\varphi_b \geq 1$  и режим стохастической диффузии  $D_0 N d(q\vartheta_b)/dr \geq 1$ . Отметим, что область применимости упрощенного уравнения еще уже. Оно может быть использовано только, если  $1 \gg g \gg D_0 N d(q\vartheta_b)/dr$ .

**Общие выражения для потоков.** Потоки частиц и тепла, усредненные по магнитной поверхности, определяются выражением (3.45), в котором скорость радиального дрейфа ведущего центра банановой орбиты (3.38) надо заменить радиальной скоростью, соответствующей траектории (3.61). С учетом того, что радиальное смещение накапливается только в узких окрестностях точек отражения  $\vartheta = \pm\vartheta_b$ , выражение для гофрировочной дрейфовой

скорости можно записать в виде

$$v_{\delta} = \frac{d}{dt} \sum D = D_b \frac{|v_{\parallel}|}{qR} [\delta(\vartheta - \vartheta_b) \sin F_+ + \delta(\vartheta + \vartheta_b) \sin F_-]. \quad (3.63)$$

Из-за наличия  $\delta$ -функций в выражении для скорости интегрирование по  $\vartheta$  выполняется легко. Принимая во внимание, что функция распределения (3.60) разрывна в точках  $\vartheta = \pm \vartheta_b$ , при интегрировании по  $\theta$  с  $\delta$ -функцией необходимо использовать среднее значение:

$$f = \frac{f_{+0} + f_{-0}}{2} = \frac{df_m}{dr} D_b \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-gm) \sin F_m - \frac{1}{2} \sin F_0 \right]. \quad (3.64)$$

Подставляя  $v_{\delta}$  (3.63) и  $f$  (3.64) в выражение (3.45), преобразуем радиальные потоки к виду

$$\left[ \frac{\Gamma}{Q} \right] = \frac{\varepsilon}{4m^2 q R} \int \frac{df_m}{dr} D_b^2 I_w w_k \left[ \frac{1}{w_k} \right] \sin \vartheta_b d\vartheta_b dw_k, \quad (3.65)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_b &= \rho \delta(\vartheta_b) \sqrt{\pi N q^3} |\sin \vartheta_b| [(Nq\delta)^{3/2} + (\varepsilon |\sin \vartheta_b|)^{3/2}]^{-1}; \\ I_w &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sin F_+ \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-gm) \sin F_m + \right. \\ &\left. + \sin F_- \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-gm) \sin F_m - \sin^2 F_0 \right) d\varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

Здесь в первой сумме траектории заканчиваются в  $\vartheta = \vartheta_b$ , а во второй — в  $\vartheta = -\vartheta_b$ .

Таким образом, получено разностное кинетическое уравнение (3.59), пригодное для описания процессов переноса в случаях, когда возмущение носит резонансный характер и накапливается только на коротких участках траектории. Формальное решение разностного уравнения (3.60) позволило представить общие выражения для потоков в виде интегралов (3.65), (3.66). Однако вычисление интеграла (3.66) требует расчета траекторий по разностным уравнениям (3.61). При этом разным режимам гофрировочного бананового переноса соответствуют учет различных эффектов при вычислении траектории и различные соотношения между параметрами траектории и параметром столкновительности  $g$ .

#### 3.4. Радиальные потоки, создаваемые банановыми частицами

**Локальный в пространстве скоростей коэффициент переноса.** Величина  $I_w$  (3.66) представляет собой усредненную по магнитной поверхности корреляцию начальных условий с решением кинетического уравнения. Умноженный на  $D_b^2/\tau_b$ , этот интеграл опреде-



ляет локальный в фазовом пространстве коэффициент переноса. Наиболее просто он вычисляется в случае

$$\gamma = D_0 N \frac{d(q\vartheta_b)}{dr} = \rho \delta \frac{q}{r} \left( \frac{Nq}{\varepsilon} \right)^{1/2} \left( \frac{\pi}{|\sin \vartheta_b|} \right)^{1/2} \left( \vartheta_b S + \operatorname{ctg} \vartheta_b + \frac{v_E}{v_d} \right) \gg g, \quad (3.67)$$

соответствующем области применимости упрощенного бананово-дрейфового кинетического уравнения (3.42), когда можно пренебречь изменением  $q\vartheta_b$  и  $\Delta\vartheta_b$  на траектории. Тогда из (3.61) следует

$$F_m = N\varphi_0 + mN\Delta\varphi_b + (-1)^m (Nq\vartheta_b - \pi/4).$$

Подставляя это выражение в интеграл (3.66), получаем [10]

$$I_w = \frac{1 - e^{-4g} + 2(e^{-g} - e^{-3g}) \cos(N\Delta\varphi_b) \cos(2Nq\vartheta_b)}{(1 - e^{-2g})^2 + 4e^{-2g} \sin^2(N\Delta\varphi_b)}.$$

Слагаемое с быстро осциллирующим множителем  $\cos(2Nq\vartheta_b)$  в этой формуле несущественно, поскольку после интегрирования по  $\vartheta_b$  вклад от него уменьшается в  $Nq$  раз. Без учета быстро осциллирующего слагаемого  $I_w$  принимает вид

$$I_w = (1 - e^{-4g}) / [(1 - e^{-2g})^2 + 4e^{-2g} \sin^2(N\Delta\varphi_b)]. \quad (3.68)$$

При  $\gamma \geq g$  уравнения (3.61) не решаются аналитически. В этом случае траектории и значения интеграла (3.66) вычисляются численно. При этом отбрасыванию быстро осциллирующих множителей соответствует усреднение по  $\vartheta_b$ :

$$I_w = \frac{\pi}{Nq} \int_0^{\pi/Nq} I_w d\vartheta_b.$$

Помимо этого, при численном решении уравнений (3.61) для простоты предполагалось, что  $d\Delta\varphi_b/dr = 0$ . Как показано в приложении П4, такое приближение вполне оправдано для расчета бананового гофрировочного переноса при  $\Delta\vartheta_b \geq 1(Nq)$ .

При низких энергиях  $\omega \leq \omega_d[\varepsilon^2/(Nq\delta^2)]^{1/5}$ , что соответствует  $\gamma \leq g$ , численно вычисленный интеграл (3.66) совпадает с результатом расчета по формуле (3.68). При увеличении энергии в диапазоне  $\omega_d[\varepsilon^2/(Nq\delta^2)]^{1/5} \leq \omega \leq \omega_r \varepsilon^2/(Nq\delta^2)$  ( $g \leq \gamma \leq 1$ ) коэффициент переноса сохраняет резонансный характер, но его значение в резонансных точках уменьшается. При этом  $I_w$  может быть аппроксимирован формулой [10]

$$I_w = (1 - e^{-4g}) \{ (1 - e^{-2g})^2 + 4e^{-2g} [\sin^2(N\Delta\varphi_b) + 0,46\gamma^2] \}^{-1}. \quad (3.69)$$

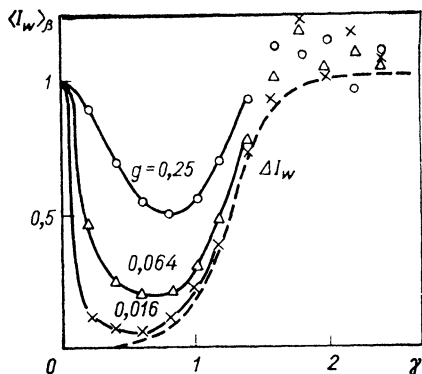


Рис. 28. Зависимость усредненного по резонансному пику локального в пространстве скоростей коэффициента переноса банановых частиц (3.71) от параметра  $\gamma$

При еще больших энергиях  $\omega \geq \omega_r \epsilon^2 / (Nq\delta^2)$  ( $\gamma \geq 1$ ) становится существенной стохастизация траекторий [13] и значение  $I_w$  снова начинает расти. Разница  $\Delta I_w$  между вычисленным значением  $I_w$  и результатом, полученным по формуле (3.69), меняется нерегулярно при малых изменениях параметров  $\beta = N\Delta\phi_b$ . Однако

усредненная по интервалу  $\Delta\beta \leq 0,3 \Delta I_w$  практически перестает зависеть от  $\beta$ . Поэтому стохастическая добавка вычисляется как средняя величина

$$\Delta I_w = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Delta I_w d\beta.$$

Оказалось, что в пределах точности вычислений  $\Delta I_w$  не зависит от  $g$  и может быть аппроксимирована формулой

$$\Delta I_w \approx [1 + \exp(6,9 - 5,5\gamma)]^{-1}. \quad (3.70)$$

Это иллюстрируется рис. 28, на котором изображено семейство зависимостей локального в пространстве скоростей коэффициента переноса, проинтегрированного по области резонанса  $\beta = k\lambda$ . Тот факт, что аппроксимация (3.70) не обращается в нуль при  $\gamma \rightarrow 0$ , не играет существенной роли, поскольку она была получена при  $\gamma > 0,5$ , а уже при  $\gamma = 0,5$   $\Delta I_w$  становится столь малым, что не дает заметного вклада в перенос. Общее выражение для  $I_w$  — локального в пространстве скоростей коэффициента переноса — имеет, таким образом, вид суммы резонансного коэффициента (3.69) и стохастической добавки (3.70):

$$I_w = \frac{1 - e^{-4g}}{(1 - e^{-2g})^2 + 4e^{-2g}(\sin^2 N\Delta\phi_b + 0,46\gamma^2)} + \frac{1}{1 + \exp(6,9 - 5,5\gamma)}. \quad (3.71)$$

**Потоки тепловых частиц. Режимы гофрировочного плато и бананово-дрейфовый.** Поскольку температура плазмы даже в установках с реакторными параметрами удовлетворяет условию  $T \leq \omega_p$ , то для основной массы тепловых частиц выполняется неравенство  $\omega \leq \omega_d [e^2 / (Nq\delta^2)]^{1/5} \sim 4\omega_p$ . Это неравенство соответствует условию  $\gamma < g$ , при котором в локальном коэффициенте (3.71) можно пренебречь конечностью  $\gamma$ . Помимо этого, энергия тепловых частиц удовлетворяет неравенству  $\omega \ll \omega_r$ , при котором  $N\Delta\phi_b \ll 1$ . Таким образом, для тепловых частиц локальный в пространстве

скоростей коэффициент переноса может быть записан в виде

$$I_w = \frac{1 - e^{-4g}}{(1 - e^{-2g})^2 + 4e^{-2g}N^2\Delta\varphi_b^2}. \quad (3.72)$$

Бананово-дрейфовому режиму соответствует предел  $g \ll 1$  [33]

$$I_w = \frac{g}{g^2 + N^2\Delta\varphi_b^2} = \frac{v_c \tau_b^{-1}}{v_c^2 + u_7^2 N^2/R^2}, \quad (3.73)$$

а режиму гофрировочного плато — предел  $g \gg 1$ , где

$$I_w = 1. \quad (3.74)$$

В режиме гофрировочного плато радиальные потоки (3.65) легко вычисляются [32]:

$$\left[ \frac{\Gamma}{Q/T} \right] = \frac{\chi^{RP} n}{3} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \left[ \frac{d \ln f_{m0}/dr}{d \ln T/dr} \right]. \quad (3.75)$$

Коэффициент теплопроводности, получаемый из условия зануления потока частиц  $\Gamma=0$ , определяется формулой

$$\chi^{RP} = 3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{T}{m} \right)^{3/2} \frac{Nq^2 \langle \delta^2 \rangle}{R\epsilon^2 \omega_B^2} \frac{\epsilon^3}{\epsilon^3 + (Nq\delta)^3}, \quad (3.76)$$

где  $\langle \delta^2 \rangle = \int_0^{2\pi} \delta^2(r, \vartheta) d\vartheta / (2\pi)$ . Последний множитель приближенно отражает поведение смещения (1.42) при  $\epsilon < Nq\delta$  и устраняет расходимость  $\chi^{RP}$  при малых радиусах.

Как уже говорилось, из-за узости области применимости бананово-дрейфового уравнения  $\omega_p \lesssim \omega \lesssim 4\omega_p$  вряд ли целесообразно выделять потоки из этой области энергий в самостоятельный режим. Более полезно рассмотрение бананово-дрейфового переноса как расширение режима гофрировочного плато в область более высоких энергий. Такой коэффициент охватывает все тепловые частицы. Трудность, однако, заключается в том, что никакого достаточно точного, проинтегрированного по  $\vartheta_b$  выражения, описывающего всю область тепловых частиц, получить не удастся. Поэтому для расчета гофрировочной теплопроводности банановых частиц приходится использовать интегральное выражение (3.65) с локальным коэффициентом  $I_w$  (3.72). Переходя к безразмерным переменным, запишем потоки (3.65) в виде

$$\left[ \frac{\Gamma}{Q/T} \right] = \frac{\delta_0^2 \chi^{RP}}{12\pi \langle \delta^2 \rangle} \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{bmatrix} \left[ \frac{d \ln f_{m0}/dr}{d \ln T/dr} \right], \quad (3.77)$$

где  $I_n = \int_{U_n}^{\infty} e^{-U} U^{n+1} dU \int_0^{2\pi} I_w(U, \vartheta_b) \frac{\delta^2(r, \vartheta_b)}{\delta_0^2} \frac{d\vartheta_b}{[1 + (Nq\delta/(\epsilon |\sin \vartheta_b|))^2]^{3/2}}$ ;

$$U_n = \omega_p/T \sqrt{Nq},$$

а верхний предел интегрирования взят бесконечным, поскольку считается, что  $T \ll \omega_d (\epsilon^2 / (Nq\delta^2))^{1/5}$ . Здесь  $I_r$  описывается формулой (3.72) с параметрами  $g$  и  $N\Delta\varphi_b$ , выраженными через безразмерные переменные  $U = \omega_k / T$  и  $\vartheta_b$ :

$$\left. \begin{aligned} g &= \left( \frac{\omega_p}{T} \right)^2 \frac{6 \sqrt{2\pi}}{U^2 \sin^2 \vartheta_b} \left( E - K \cos \frac{\vartheta_b}{2} \right) C(\sqrt{U}); \\ N\Delta\varphi_b &= 4 \left( \frac{T}{\omega_r} \right)^{1/2} \sqrt{U} K \left[ -\frac{E_0}{2U} + \frac{E}{K} - \frac{1}{2} + 2S \left( \frac{E}{K} - \cos^2 \frac{\vartheta_b}{2} \right) \right]; \\ C(\sqrt{U}) &= \left( 1 - \frac{1}{2U} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{U}} e^{-x^2} dx + \frac{e^{-U}}{\sqrt{\pi U}}; \\ E &= E(\sin(\vartheta_0/2)), \quad K = K(\sin(\vartheta_b/2)); \quad E_0 = eE_r R / T. \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

Если температура плазмы настолько высока, что приближение  $T \ll \omega_d [\epsilon^2 / (Nq\delta^2)]^{1/5}$  становится неоправданным, то заметную роль в переносе тепловой компоненты ионов начинают играть резонансные эффекты. Тогда в формулах (3.77) необходимо использовать полное выражение для  $I_w$  (3.71), в котором параметр  $\gamma$ , выраженный в безразмерных переменных  $U$  и  $\vartheta_b$ , имеет вид

$$\gamma = \left( \frac{T}{\omega_r} \right)^{1/2} \frac{\delta(\vartheta_b)}{\epsilon} \left( \frac{2\pi Nq}{\sin \vartheta_b} \right)^{1/2} \left( \vartheta_b S + \text{ctg} \vartheta_b + \frac{E_0}{U} \right) \sqrt{U}. \quad (3.79)$$

Оценим коэффициент теплопроводности банановых частиц, используя радиальное электрическое поле, зануляющее ионный поток. Тогда ионный теплоперенос оказывается пропорциональным только градиенту температуры  $Q = -n\chi^{RB} dT/dr$  с гофрировочным коэффициентом теплопроводности банановых частиц

$$\chi^{RB} = \frac{1}{4 \sqrt{2\pi}} \left( \frac{\omega_d}{m} \right)^{3/2} \frac{Nq^2 \delta_0^2}{R\epsilon^2 \omega_B^2} L^{RB}, \quad (3.80)$$

где  $L^{RB} = (T/\omega_d)^{3/2} (I_3 - I_2^2/I_1)$ . Формулы (3.77) — (3.80) описывают режимы гофрировочного переноса банановых частиц в тепловом диапазоне энергий. В частности, сюда включаются транспортные коэффициенты в режиме гофрировочного плато  $\chi^{RP} \sim v_i^0$  и бананово-дрейфовых режимах  $\chi^{BH} \sim v_i^{-1}$  и  $\chi^{BL} \sim v_i$ , а также вклад от банановых частиц, отражающихся на внутреннем обводе тора  $\chi^{BD} \sim \sim v_i^{1/2}$ . Выделение отдельных режимов вряд ли имеет смысл, поскольку они описывают очень близкие области в пространстве скоростей. Действительно, границе перехода между двумя бананово-дрейфовыми режимами соответствует энергия  $\omega_d$  35 кэВ (2.91). Переход же от режима гофрировочного плато к бананово-дрейфовому происходит при

$$\omega_p \approx Nq^{3/2} (5 \cdot 10^{-11} nR)^{1/2} \epsilon^{-3/4} \approx 20 \text{ кэВ}. \quad (3.81)$$

Здесь  $R$  — в м,  $n$  — в  $\text{см}^{-3}$  и использованы параметры установки с реакторными параметрами  $n=3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $R=5 \text{ м}$ ,  $N=12$ ,  $q=1,2$ ,  $\varepsilon=0,1$ . Помимо энергии, режим переноса зависит от пологидального угла в точке отражения [см. формулу (3.78)]. Поэтому ионы, распределенные по энергии и углу, попадают в зависимости от конкретных значений  $\omega_k$  и  $\vartheta_b$  в разные режимы гофрировочного переноса.

Для приближенного вычисления теплопроводности  $\chi^{RB}$  формулы (3.77) — (3.79) могут быть несколько упрощены, если в  $I_n$  произвести интегрирование по углу, воспользовавшись модельной зависимостью  $\delta(r, \vartheta) = \delta_0(r) \times \exp(-\vartheta^2/2)$ . При этом в области энергий  $\omega > \omega_p$  интегрирование приводит к аппроксимации

(3.50), а в области  $\omega < \omega_p$  интегрирование с  $I_w=1$  выполняется непосредственно. В результате интегралы  $I_n$ , входящие в выражения (3.77), (3.79), могут быть представлены в виде [33]

$$I_n = \int_{U_n}^{\infty} U^{n+1} e^{-U} \Psi(U) dU, \quad (3.82)$$

где

$$\Psi = \begin{cases} 1,77 & \text{при } U < 3\omega_p/T; \\ 0,21 \left(\frac{T}{\omega_p}\right)^2 \frac{U^2}{C(\sqrt{U})(5A^2 + 2A + 1)} & \text{при } U > 3\omega_p/T; \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{T}{\omega_d}\right)^{1/2} \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} \frac{U^{3/2}}{C(\sqrt{U})} (-E_0 + U(0,9S + 0,4)).$$

Зависимость  $L^{RB}(T/\omega_d)$  (3.80) при нескольких значениях параметров  $\omega_p/\omega_d$  и  $E_0$  приведена на рис. 29. Поскольку в  $L^{RB}$  включена вся зависимость  $\chi^{RB}$  от  $T$ , этот рисунок показывает температурную зависимость коэффициента гофрировочной теплопроводности банановых частиц. Как видно из рис. 29, при  $\omega_p/\omega_d=0,5$ , что характерно для ионов, режим бананово-дрейфового переноса  $\chi^{BH} \sim \nu_i^{-1}$  (3.10) практически не реализуется. Он может заметно проявиться только при  $\omega_p/\omega_d \leq 0,2$  и поэтому важен только для электронов. При  $T \geq \omega_p$  значительную неопределенность в  $\chi^{RB}$  вносит радиальное электрическое поле. Возрастание теплопроводности при  $3 \leq E_0 \leq 9$  связано с уменьшением торондальной прецес-

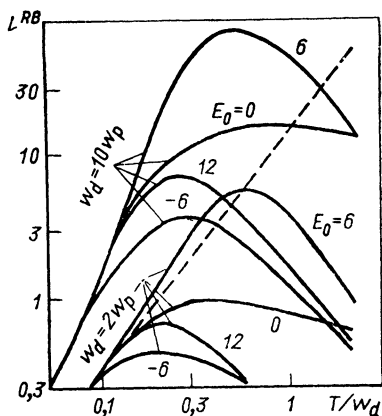


Рис. 29. Зависимость теплопроводности банановых частиц (3.80) от температуры при различной напряженности электрического поля ( $E_0 = E_e R/T$ ).

пунктирная прямая — температурная зависимость теплопроводности в режиме гофрировочного плато (3.76)

сии под действием электрического поля и с появлением группы резонансных частиц с  $u_T=0$ . Для более точного выяснения роли резонансных эффектов желательно пользоваться общими формулами (3.77) — (3.80) с  $I_w$  (3.71).

**Потоки высокоэнергетических частиц.** Для частиц, энергия которых значительно выше  $\omega_p$ , параметр  $g = v_c \tau_b \ll 1$ . Если к тому же энергия не слишком велика, так что  $\gamma < 1$ , то локальный в пространстве скоростей коэффициент переноса носит характер узких пиков, локализованных вблизи поверхностей  $N\Delta\varphi_b = k\pi$ :

$$\chi_w = \frac{D_b^2}{\tau_b} I_w = \frac{g D_b^2 \tau_b^{-1}}{g^2 + \sin^2(N\Delta\varphi_b) + 0,46\gamma^2}. \quad (3.83)$$

Поскольку даже для высокоэнергетических частиц функция распределения типично более гладкая функция  $\vartheta_b$ , чем локальный транспортный коэффициент, имеет смысл проинтегрировать формулу (3.83) по окрестности резонансной поверхности  $N\Delta\varphi_b = k\pi$ . Заменяя в окрестности  $k$ -й резонансной точки  $\sin(N\Delta\varphi_b)$  линейным разложением  $\sin(N\Delta\varphi_b) \approx a_k(\vartheta_b - \vartheta_k)$ , где  $a_k = Nd\Delta\varphi_b/(d\vartheta_b)$ , и интегрируя по  $\vartheta_b$ , находим вклад в перенос от  $k$ -го резонанса:

$$I_{wk} = \pi g / [a_k (g^2 + 0,46\gamma^2)^{1/2}]. \quad (3.84)$$

Ширина области по  $\vartheta_b$ , дающая основной вклад в интеграл, определяет ширину пика на функции распределения  $\Delta\vartheta_b$ . Из (3.83) видно, что ширину пика можно оценить следующим образом:

$$\Delta\vartheta_b \sim (0,46\gamma^2 + g^2)^{1/2} / a_k \geq \gamma / a_k \sim \delta \sqrt{Nq} / \varepsilon. \quad (3.85)$$

Для не слишком низкой гофрировки  $\delta > \varepsilon(Nq)^{-3/2}$  ширина пика удовлетворяет неравенству  $\Delta\vartheta_b > 1/(Nq)$ , которое оправдывает предположение, использованное при выводе разностного уравнения (3.59). Анализ общего случая дан в приложении П4.

Формула (3.84) описывает резонансные плато и банановый режимы. При  $\omega \leq \omega_d[\varepsilon^2/(Nq\delta^2)]^{1/5}$  ( $g \gg \gamma$ ) локальный коэффициент переноса не зависит от частоты столкновений (резонансное плато):

$$\chi_{wk}^{RE} = D_b^2 \tau_b^{-1} \pi a_k^{-1}. \quad (3.86)$$

При увеличении энергии в область  $\omega \geq \omega_d[\varepsilon^2/(Nq\delta^2)]^{1/5}$  коэффициент  $\chi_{wk}$  оказывается пропорциональным частоте соударений, как в неоклассическом банановом режиме (резонансный банановый режим):

$$\chi_{wk}^{RE} = D_b^2 \pi g / (\tau_b \cdot 0,7\gamma a_k) \approx 4,5 D_b^2 v_c / (\gamma a_k). \quad (3.87)$$

Следует отметить, что при приближении к стохастическому режиму резонансный характер переноса проявляется все слабее. При  $\gamma \leq 1$  вклад от нерезонансных областей

$$\chi_w^{RE} \sim D_b^2 v_c \quad (3.88)$$

может стать сравнимым с суммой вкладов от резонансов (3.87)

или даже превысить ее. В частности, такая ситуация реализуется, если число резонансных пиков невелико и ни один из них не попадает в область высокой гофрировки  $\delta(r, \vartheta_k) \approx \delta_0(r)$ . Тогда смещение  $D_b$  в (3.88) будет определяться по максимальному значению гофрировки на магнитной поверхности  $\delta_0(r)$ , а смещение  $D_b$  в резонансных пиках (3.87) окажется пропорциональным  $\delta(r, \vartheta_k)$ , что значительно меньше  $\delta_0(r)$ .

В области стохастической диффузии  $\omega \geq \omega_s$  локальный в пространстве скоростей коэффициент переноса плавно переходит к значению, совпадающему по виду с выражением для транспортного коэффициента в режиме гофрировочного плато:

$$\chi_w^{ST} = D_b^2 / [\tau_b (1 + \exp(6,9 - 5,5\gamma))]. \quad (3.89)$$

Это выражение добавляется к любой из формул для коэффициента переноса в резонансном режиме.

Если использованные выше приближения по каким-либо причинам неоправданы, то необходимо пользоваться общим выражением

$$\chi_w^{RB} = I_w D_b^2 / \tau_b, \quad (3.90)$$

где  $I_w$  определяется формулой (3.71).

## 4. ГОФРИРОВОЧНЫЕ ПОТЕРИ ЧАСТИЦ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

### 4.1. Оценка потерь высокоэнергетических частиц из кинетического уравнения

**Специфика радиального переноса высокоэнергетических частиц.** Способность удерживать высокоэнергетические частицы (заряженные продукты термоядерной реакции или ионы, инжектируемые в плазму для нагрева) является важной характеристикой магнитной системы токамака-реактора. Потери частиц высоких энергий обусловлены в основном тремя процессами. Это, во-первых, выход частиц на стенку, связанный со значительной толщиной орбит в идеальной аксиально-симметричной системе. Для реактора-токамака этот механизм может давать 2—4 % потерь энергии термоядерных  $\alpha$ -частиц в зависимости от радиального распределения плотности, температуры и тока [43]. Два других процесса — это гофрировочные потери банановых и локально-запертых частиц, описанные в предыдущих главах. В этой главе будем рассматривать только гофрировочные потери, причем в основном банановых частиц. Локально-запертые частицы переносятся конвективно [44]. Процессы такого типа исследуются в обзоре А. В. Гуревича и Я. С. Диманта.

Специфика исследования потерь частиц высоких энергий состоит в том, что столкновения для них малоэффективны, и поэтому функция распределения далека от изотропной по pitch-углу и

от максвелловской по энергии. Потери высокоэнергетических частиц типично значительны только в узких конусах ухода. В этих конусах функция распределения быстро обедняется и в результате в стационарном режиме скорость ухода частиц высоких энергий определяется подпиткой распределения в конусе ухода либо за счет кулоновских столкновений, либо за счет источника.

Из приведенных выше вводных замечаний видно, что анализ потерь частиц высоких энергий может быть проведен только численно при аккуратном учете кулоновских соударений и геометрии гофрировки, определяющей вид областей потерь в пространстве скоростей. Эти исследования проводятся в основном двумя методами. Это, во-первых, орбитальные коды, в которых столкновения частиц высоких энергий с основной плазмой учитываются методом Монте-Карло [45, 46]. Расчет потерь высокоэнергетических частиц этим методом будет описан в следующем параграфе. Во-вторых, расчеты потерь могут быть проведены с помощью трехмерного кинетического уравнения  $(v_{\parallel}, v_{\perp}, r)$  на основе локальных в пространстве скоростей коэффициентов переноса, полученных в гл. 3. Такой расчет пока не проведен. Сделаны лишь расчеты с использованием двумерного  $(v_{\parallel}, v_{\perp})$  кинетического уравнения, в котором радиальные потери вводились модельно [47]. Начнем анализ с рассмотрения этого довольно эффективного, хотя и приближенного метода. При этом основное внимание будем уделять исследованию гофрировочных потерь термоядерных  $\alpha$ -частиц.

Для термоядерных  $\alpha$ -частиц наиболее важным механизмом гофрировочных потерь является стохастическая диффузия банановых орбит [13] с локальным в пространстве скоростей коэффициентом переноса (3.88), (3.89). В стохастическом режиме ведущий центр банановой частицы при каждом отражении от области высокого магнитного поля смещается на  $\rho(Nq\delta/\epsilon)(q/N\epsilon)^{1/2} \sim 1 \div 10$  см. Поэтому, попав в область стохастической диффузии, банановая  $\alpha$ -частица покидает плазму после  $10^2$ — $10^4$  отражений. Время, необходимое для выхода  $\alpha$ -частиц на стенку,  $\tau_a \sim (10^2 - 10^4)\tau_b$  значительно меньше времени термализации  $\alpha$ -частиц:  $\tau_a \leq 10^{-2} c \ll \tau_T \sim 1$  с. Таким образом, высокоэнергетические частицы, попавшие в область стохастической диффузии, теряются из плазмы, не успев передать свою энергию основной компоненте.

Если бы стохастической диффузии были подвержены все быстрые частицы, то потери были бы катастрофически большими. В действительности стохастическую диффузию испытывают только банановые частицы с достаточно высокой энергией:  $\omega \geq \omega_s = m\epsilon^3 r^2 \omega^2_B / (N^3 q^5 \delta^2)$  (3.19). Следовательно, область стохастического переноса в пространстве скоростей представляет собой узкую полуполосу  $\omega > \omega_s$ ,  $\omega_k/B_0(1+\epsilon) < \mu < \omega_k/B_0(1-\epsilon)$ . Задача об определении доли энергии, теряемой термоядерными  $\alpha$ -частицами в процессе их термализации, сводится, таким образом, к точному определению границы стохастической области и вычислению столкновительного потока через эту границу. Математически эта задача полностью эквивалентна рассмотренной в [44] задаче об



уходе  $\alpha$ -частиц из системы при захвате в локальные магнитные пробки.

**Кинетическое уравнение с модельным описанием стохастических потерь.** Релаксация первоначального распределения высокоэнергетических частиц к равновесному описывается с помощью кинетического уравнения, учитывающего их столкновения с электронами и ионами плазмы. С учетом малости времени жизни  $\alpha$ -частиц в области стохастичности на границе области стохастизации можно было бы поставить, как и в [44], граничное условие  $f=0$ . Однако, поскольку граница области стохастичности хоть и резкая, но все же имеет конечную ширину в пространстве скоростей, будем описывать стохастический уход  $\alpha$ -частиц с магнитной поверхности радиусом  $r$  с помощью введения эффективного времени жизни  $\tau_\alpha = (a-r)^2/\chi_\omega^{RB}$ , где  $\chi_\omega^{RB}$  — локальный в пространстве скоростей коэффициент стохастической диффузии (3.88),  $a$  — малый радиус тора. Внутри области стохастичности такой способ описания также обеспечивает нулевое значение функции распределения, поскольку  $\tau_\alpha \ll \tau_T$ , но он позволяет адекватно описать и границу перехода в стохастический режим, где  $\tau_\alpha \sim \tau_T$ .

Таким образом, термализацию  $\alpha$ -частиц будем описывать с помощью кинетического уравнения [47]

$$\partial f / \partial t = St_e(f) + St_i(f) + P_\alpha - f / \tau_\alpha,$$

где  $P_\alpha$  — источник  $\alpha$ -частиц. В переменных  $s = \mu B_0 / \omega_k$  и  $\omega_k$  это уравнение, усредненное по магнитной поверхности, принимает вид [48]:

$$J_1 \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2\omega_\alpha^{3/2}}{\tau_T \omega^{1/2}} \sum_\beta \frac{n_\beta}{n_e} Z_\beta^2 \left\{ J_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{m}{m_\beta} A_\beta(\omega) \left( f + T_\beta \frac{\partial f}{\partial \omega} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega} C_\beta(\omega) \frac{\partial}{\partial s} \left[ s J_2 \frac{\partial f}{\partial s} \right] \right\} + J_1 P - \frac{J_1}{\tau_\alpha} f, \quad (4.1)$$

где

$$A_\beta(\omega) = -2 \sqrt{\frac{U_\beta}{\pi}} e^{-U_\beta} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{U_\beta}} e^{-x^2} dx; \\ C_\beta(\omega) = \frac{e^{-U_\beta}}{\sqrt{\pi U_\beta}} + \left( 1 - \frac{1}{2U_\beta} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{U_\beta}} e^{-x^2} dx; \\ U_\beta = \frac{\omega}{T_\beta}; \quad \tau_T = \left( \frac{m}{2} \right)^{1/2} \frac{\omega_\alpha^{3/2}}{\pi n_e e^4 Z \ln \Lambda}$$

— время столкновительной релаксации;  $\ln \Lambda \approx 20$  — кулоновский логарифм;  $Z_\beta$  — заряды частиц сорта  $\beta$ . Суммирование по  $\beta$  в правой части уравнения (4.1) включает операторы столкновений с электронами ( $\beta=e$ ) и основными ионами ( $\beta=i$ ) плазмы, имею-

щими максвелловское распределение с заданными температурами и плотностями  $T_\beta, n_\beta$ . Коэффициенты  $J_1$  и  $J_2$  появляются при усреднении кинетического уравнения по магнитной поверхности

$$J_1(\epsilon, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{(1 + \epsilon \cos \vartheta - s)^{1/2}};$$

$$J_2(\epsilon, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \epsilon \cos \vartheta - s)^{1/2} d\vartheta.$$

Для запертых частиц эти интегралы вычисляются по углу  $\vartheta$ , заключенному между точками отражения  $\vartheta_b = \pm \arccos[(1-s)/\epsilon]$ .

Эффективное время жизни  $\alpha$ -частиц определим согласно результатам § 3.4, учитывая только стохастическое слагаемое в формуле (3.88):

$$\tau_\alpha = \frac{4(a-r)^2 R_0 [(\epsilon |\sin \vartheta_b|)^{1/2} + (Nq\delta)^{1/2}]^2}{\sin^2 \vartheta_b \rho^2 q^2 N \delta^2(r, \vartheta_b)} \times$$

$$\times \left(\frac{m}{2w}\right)^{1/2} J_1(1 + \exp(6,9 - 5,5\gamma)), \quad (4.2)$$

где  $\gamma$  задается выражением (3.79). На рис. 30 представлены полученные из (4.2) линии уровня эффективности потерь  $\alpha$ -частиц  $\tau_T/\tau_\alpha$  на плоскости  $w, s$ . При этом были использованы параметры INTOR  $R_0=5,2$  м,  $N=12$ ,  $B_0=5,5$  Тл и приближенное значение глубины гофрировки (1.10) для  $r=0,5$  м. Из рис. 30 видно, что время жизни  $\tau_\alpha$  сравнивается с кулоновским  $\tau_T$  при  $w \sim 1$  МэВ и резко уменьшается с ростом энергии частиц. Значительное различие времени жизни частиц с разными  $s$  обусловлено тем, что частицы с  $s=1-\epsilon$  (почти пролетные) отражаются на внутреннем обводе тора и испытывают в точках отражения воздействие значительно меньшей гофрировки, чем частицы с  $s=1+\epsilon$ , отражающиеся на внешнем обводе тора (см. рис. 6).

В дальнейшем нас будет интересовать распределение энергии  $\alpha$ -частиц в процессе остывания. Для получения уравнения баланса энергии умножим (4.1) на  $w$  и проинтегрируем по пространству скоростей:

$$dW/dt = -Q_i - Q_e - Q_\delta + Q_\alpha, \quad (4.3)$$

где  $Q_\beta = \pi \left(\frac{2w_\alpha}{m}\right)^{1/2} \frac{2}{\tau_T} \frac{n_\beta}{n_e} Z_\beta^2 \int J_1 w \frac{\partial}{\partial w} \left[ \frac{m}{m_\beta} A_\beta(w) \left( f + T_\beta \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right] \times$

$\times dw ds$  — плотность мощности, передаваемая электронам и ионам плазмы ( $\beta=e, i$ );  $Q_\delta = \pi \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \int \frac{w^{1/2}}{\tau_\alpha} J_1 f dw ds$  — плотность теряемой из-за гофрировки мощности;  $Q_\alpha = \pi \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \int w^{3/2} J_1 P_\alpha dw ds$  —

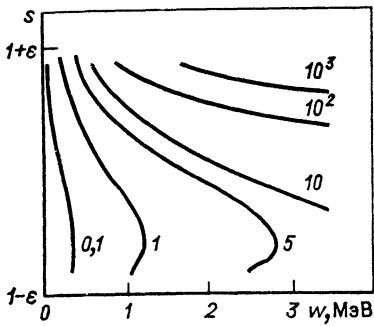


Рис. 30. Линии уровня эффективно-сти потерь  $\tau_T/\tau_a$  для INTOR с при-ближенной зависимостью гофриров-ки (1.10) на радиусе  $r=50$  см

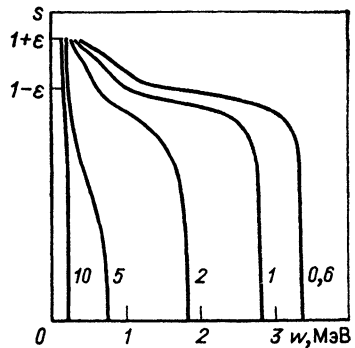


Рис. 31. Линии уровня функции рас-пределения  $\alpha$ -частиц при большой гофрировке ( $\delta=0,7\%$ );  $r=50$  см,  $T=20$  кэВ,  $n=2 \cdot 10^{14}$  см $^{-3}$

плотность мощности рождающихся  $\alpha$ -частиц. Разделив теперь  $Q_e$ ,  $Q_i$ ,  $Q_\delta$  на  $Q_\alpha$ , получим локальные по радиусу доли энергии, передаваемые электронам, ионам и теряемые из плазмы:

$$\eta_e = Q_e/Q_\alpha; \quad \eta_i = Q_i/Q_\alpha; \quad \eta_\delta = Q_\delta/Q_\alpha. \quad (4.4)$$

**Определение доли стохастических потерь энергии термоядерных  $\alpha$ -частиц.** Численное решение уравнения (4.1) проводилось в области  $\{0 < \omega < 1,2\omega_\alpha; 0 < s < 1+\epsilon\}$  с граничным условием  $f(1,2\omega_\alpha, s) = 0$ . На остальных границах требуется лишь ограниченность функции  $f$ . Для того, чтобы избежать сильного накопления холодных  $\alpha$ -частиц в области низких энергий, вводились дополнительные потери, не влияющие на баланс энергии. В качестве начального условия использовалась нулевая функция. Задача решалась до выхода на стационар.

Решение кинетического уравнения (4.1) проводилось для различных радиусов  $r$  и при разных амплитудах гофрировки. При этом в качестве опорных параметров использовались приведенные выше параметры INTOR. Рассматривалась дейтериевая плазма с температурой в центре  $T_e = T_i = 20$  кэВ и плотностью  $2 \cdot 10^{14}$  см $^{-3}$ . Как и следовало ожидать, при достаточно высокой гофрировке, когда эффективно проявляется стохастическая диффузия, область банановых частиц в значительной степени обеднена (рис. 31). Если же гофрировка невелика, то функция распределения  $\alpha$ -частиц практически изотропна (рис. 32), что говорит о несущественности стохастической диффузии.

Для определения энергии  $\alpha$ -частиц, теряемой из плазмы и передаваемой электронам и ионам, воспользуемся формулами (4.4) с моноэнергетическим источником  $\alpha$ -частиц:

$$P_\alpha = P_\alpha(r) \frac{m_\alpha^{3/2}}{4\pi(2\omega_\alpha)^{1/2}} \delta(\omega - \omega_\alpha), \quad (4.5)$$

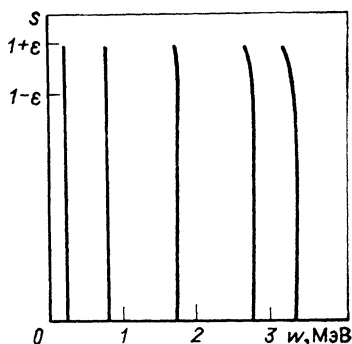


Рис. 32. Линии уровня функции распределения  $\alpha$ -частиц при небольшой гофрировке ( $\delta=0,1\%$ )

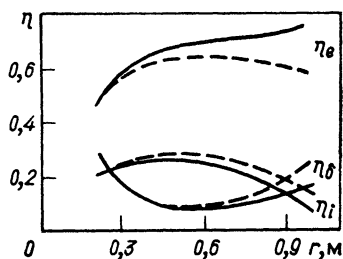


Рис. 33. Зависимость доли передаваемой  $\alpha$ -частицами энергии электронам ( $\eta_e$ ) и ионам ( $\eta_i$ ) и гофрировочных потерь энергии ( $\eta_\delta$ ) от радиуса

где  $P_\alpha(r)$  — число  $\alpha$ -частиц, рождающихся в единицу времени в единице объема на заданной магнитной поверхности. На рис. 33 представлены зависимости этих величин от  $r$ . Из рисунка видно, что доля энергии, теряемая  $\alpha$ -частицами, имеет минимум при  $r_n \approx 50 \div 60$  см и растет как в области больших, так и малых радиусов. При  $r > r_n$  увеличение  $\eta_\delta$  действительно соответствует увеличению доли энергии  $\alpha$ -частиц, уходящих на стенку. Рост же  $\eta_\delta$  при  $r < r_n$  не дает на самом деле роста потерь по сравнению с минимальным значением  $\eta_{\delta n} = \eta_\delta(r_n)$ . Частицы из центральных областей при диффузии наружу проходят через окрестность  $r_n$ , и значительная часть там задерживается. Поэтому во всей области  $r < r_n$  потери определяются значением  $\eta_{\delta n}$ .

С учетом сказанного интегральные стохастические потери энергии  $\alpha$ -частиц из всего шнура задаются выражением

$$Q_\delta = 2\pi \int_0^a P_\alpha(r) \eta_\delta^*(r) r dr, \quad (4.6)$$

где

$$\eta_\delta^*(r) = \begin{cases} \eta_\delta(r) & \text{при } r > r_n; \\ \eta_{\delta n} & \text{при } r < r_n. \end{cases}$$

Поскольку при  $r \geq 0,5$  м  $\sim r_n$  источник  $\alpha$ -частиц  $P_\alpha(r)$  быстро уменьшается, то полная доля гофрировочных потерь энергии  $\alpha$ -частиц согласно (4.6) равна  $\eta_{\delta n}$ , что для варианта магнитной системы INTOR [49] составляет 8—10 % (см. рис. 33).

Для выяснения зависимости потерь от параметров были проведены расчеты с несколькими вариантами распределения гофрировки для постоянного и параболически спадающего (соответственно пунктирные и сплошные кривые на рис. 33) профилей температуры плазмы. Расчеты показали, что профиль температуры

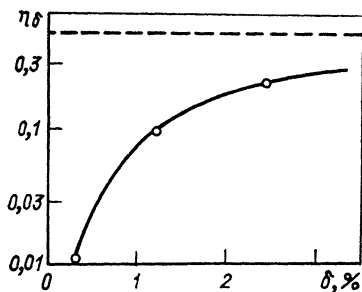


Рис. 34. Зависимость гофрировочных потерь энергии  $\alpha$ -частиц от глубины гофрировки на внешнем обводе камеры

слабо влияет на  $\eta\delta$ . В частности, значение  $\eta_{\text{дн}}$  практически совсем не меняется. Заметно лишь некоторое перераспределение энергии, передаваемой электронам и ионам плазмы. Еще меньшее влияние оказывает изменение профиля плотности плазмы. Это связано с тем, что основное влияние на потери оказывает по-

ложение границы области стохастичности, которая слабо зависит от плотности и температуры плазмы при их изменениях в широких пределах. С другой стороны, гофрировочные потери очень чувствительны к глубине гофрировки (рис. 34). Так, в варианте INTOR на фазе I [50], где гофрировка была приблизительно в 4 раза ниже, чем (1.10), стохастические потери не превышают 1 %. При удвоении гофрировки потери также приблизительно удваиваются и достигают 20 %. В пределе очень высокой гофрировки, когда конус потерь доходит практически до нулевой энергии, максимальные потери энергии термоядерных  $\alpha$ -частиц составляют примерно 50 %.

#### 4.2. Расчет гофрировочных потерь $\alpha$ -частиц методом Монте-Карло

**Численное определение механизмов ухода.** Расчеты методом Монте-Карло автоматически учитывают все механизмы ухода. Поэтому надежное выделение гофрировочных потерь можно сделать, только если они составляют значительную часть полных потерь. Расчеты выхода термоядерных  $\alpha$ -частиц на стенку камеры проводились, например, в [45, 46, 51]. Здесь мы будем в основном придерживаться результатов, полученных в [45], используя данные [46] для сравнения и уточнения.

Расчеты [45] проводились для модели магнитной системы с круглыми магнитными поверхностями с учетом всех трех компонент гофрировки: (1.3), (1.5) и (1.6). Распределение возмущения  $\tilde{V}$  рассчитывалось численно, а его амплитуда выбиралась произвольной и нормировалась на величину  $\delta_0 = \delta(1, 2 \text{ м}, 0)$ .

Использованная в расчетах гофрировка при  $\delta_0 = 0,75 \%$  приведена на рис. 35. Для плазмы использовались параболические рас-

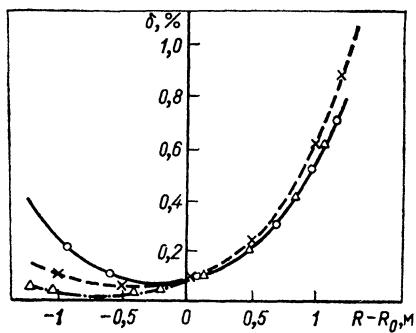


Рис. 35. Глубина гофрировки торoidalного поля в плоскости  $z=0$  для INTOR:

× — по формуле (1.10); Δ и ○ — по данным [46, 45]

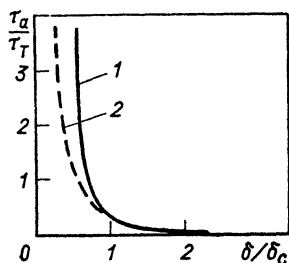


Рис. 36. Зависимость отношения времени выхода  $\alpha$ -частиц ко времени термализации от гофрировки:

1 — без учета столкновений; 2 — с учетом рассеяния по питч-углу

пределения температуры, плотности и тока с  $T_e(0) = T_i(0) = 20$  кэВ,  $n_e(0) = 4 \cdot 10^{14}$  см $^{-3}$ ,  $R_0 = 5,3$  м,  $a = 1,2$  м.

Основное внимание в расчетах уделялось стохастическим потерям. Но сначала определили быстрые орбитальные потери, которые составили 2 % для  $\delta_0 = 0,5$  % и 3 % для  $\delta_0 = 1$  %. Чтобы убедиться в стохастическом характере потерь, выполнили анализ скорости ухода частиц в зависимости от параметра  $\delta/\delta_c \approx \gamma$ , где  $\delta_c = [\epsilon / (\pi N q)^{3/2}] (\rho dq/dr)^{-1}$  — критическое значение гофрировки для перехода в стохастический режим. На рис. 36 представлена зависимость отношения времени бесстолкновительного выхода  $\tau_\alpha = -d \ln N/dt$  ко времени термализации  $\tau_T$  от  $\delta/\delta_c$ , полученная при  $r = 0,72$  м,  $\vartheta_b \sim \pi/2$ .

Видно, что скорость ухода является резкой функцией параметра  $\delta/\delta_c$ , что подтверждает стохастический механизм переноса  $\alpha$ -частиц. Для частиц, отражающихся в стохастической области  $\delta(r, \vartheta) > \delta_c$ , коэффициент диффузии, оцениваемый как  $(r-a)^2/\tau_\alpha$ , приблизительно соответствует коэффициенту переноса в стохастическом режиме  $\chi_w^{ST} = D_b^2/\tau_b$  (3.89) [45, 51].

Учет рассеяния по питч-углу приводит к увеличению стохастической области (пунктирная кривая на рис. 36). Этот эффект может быть вызван как рассеянием частиц в стохастическую область, так и столкновительным увеличением стохастического переноса для частиц, отражающихся при  $\delta, (r, \vartheta) \sim \delta_c$ . Помимо изменения стохастической зоны, рассеяние по питч-углу приводит к увеличению диффузии «удерживаемых» частиц, т. е. частиц, отражающихся при  $\delta(r, \vartheta) < \delta_c$ . Коэффициент диффузии этой группы частиц вычислялся по формуле

$$D_w^{NS} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_i (r_i - \langle r \rangle)^2 p_i}{\sum p_i} \right), \quad (4.7)$$

где  $\langle r \rangle = \sum r_i p_i / \sum p_i$ ;  $r_i$  — координата  $i$ -й частицы;  $p_i$  — весовой множитель, пропорциональный плотности частиц в данном состоянии. Было обнаружено, что коэффициент диффузии  $D_w^{NS}$  пропорционален частоте столкновений  $\nu_i$  и в 10—100 раз превышает неоклассический банановый коэффициент  $\chi_w^{NB}$ . Как по параметрическим зависимостям, так и по значению коэффициент переноса удерживаемых частиц  $D_w^{NS}$  близок к коэффициенту переноса в резонансном банановом режиме  $\chi_w^{RB} \sim D^2 \nu_c$  (3.87), (3.88). Отсутствие в расчетах [45] зависимости вида  $\chi_w \sim \nu^{-1}$ , которая следует из (3.87), указывает на слабую роль резонансных пиков в условиях численного эксперимента. Это, впрочем, вполне естественно для гофрировочного переноса вблизи области стохастичности (см. § 3.4).

Таким образом, численные расчеты качественно подтвердили как значение коэффициента диффузии в стохастическом режиме  $\chi_w^{ST}$ , так и границу области стохастичности в фазовом пространстве, полученные в гл. 3 аналитически. Для  $\alpha$ -частиц, находящихся вне области стохастичности, численно найден транспортный коэффициент, близкий коэффициенту переноса в резонансном банановом режиме (3.87), (3.88).

**Вычисление потерь энергии и частиц.** Зависимость от времени доли теряемой из-за выхода на стенку энергии  $\alpha$ -частиц  $\eta$  представлена на рис. 37. Насыщение потерь при  $t > 0,3 \tau_T$  связано с выходом  $\alpha$ -частиц из зоны стохастических потерь  $\omega \geq \omega_s$  вследствие уменьшения энергии при столкновениях с электронами. На этом же рисунке приведена зависимость потерь энергии  $\alpha$ -частиц в бесстолкновительном случае. На начальном этапе скорость бесстолкновительных потерь ниже из-за более узкой зоны стохастичности (см. рис. 36). Зато позже бесстолкновительные потери превышают столкновительные, что можно объяснить сохранением энергии при отсутствии столкновений и постепенным уходом на стенки  $\alpha$ -частиц, находящихся на границе области стохастичности, где транспортный коэффициент значительно ниже  $\chi_w^{ST}$ . Этот анализ характеризует сложность зависимости полных потерь  $\alpha$ -частиц от соотношения времени стохастического выхода  $\tau_a$  и времени термализации  $\tau_T$ .

Зависимость доли теряемой  $\alpha$ -частицами энергии  $\eta_w$  за все время охлаждения (стационарный уровень на рис. 37) от гофрировки на краю  $\delta_0$  показана на рис. 38. При  $\delta_0 \sim 1\%$  суммарные потери составляют около 13%. Если учесть, что для аксиально-симметричных систем потери энергии составляют примерно 3%, то гофрировка приводит к увеличению выноса энергии  $\alpha$ -частиц на 10%. Эти данные хорошо согласуются с оценкой, полученной в § 4.1 из решения кинетического уравнения. Вполне удовлетворительно согласуются и зависимости потерь энергии от  $\delta_0$ . Следует только учесть, что в [45]  $\delta_0$  вычислялась при  $r = 1,2$  м, а в предыдущем параграфе при  $r = 1,4$  м. Поэтому для установления соответствия между рис. 34 и 38 величину  $\delta_0$  на рис. 38 следует умножить на  $\delta_0(1,4 \text{ м}) / \delta_0(1,2 \text{ м}) \approx 1,4$  (см. рис. 35).

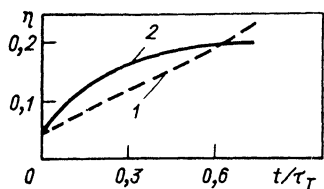


Рис. 37. Зависимость доли теряемой из-за гофрировки ( $\delta_0=1,5\%$ ) энергии  $\alpha$ -частиц от времени в бесстолкновительном случае (1) и с учетом столкновения (2)

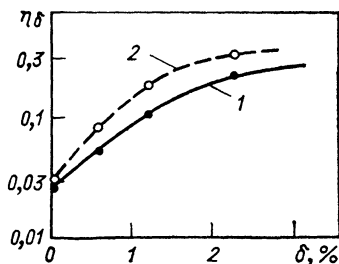


Рис. 38. Зависимость доли теряемой энергии (1) и частиц (2) от гофрировки на краю шнура

На рис. 38 показана также зависимость от гофрировки на краю доли теряемых  $\alpha$ -частиц  $\eta_p$ . В интервале  $0,4\% < \delta_0 < 1,5\%$  потери частиц в 1,5—1,8 раза больше потери энергии. Это можно объяснить торможением  $\alpha$ -частиц на электронах и увеличением роли рассеяния по питч-углу в результате столкновений с ионами при низких энергиях. Распределение выходящих на стенку  $\alpha$ -частиц по поверхности камеры имеет довольно узкий пик на внешнем обводе тора при  $\vartheta \sim 30^\circ$  (полуширина  $\Delta\vartheta \sim 20^\circ$ ). По тороидальному углу потери сконцентрированы преимущественно между катушками тороидального поля, где магнитные поверхности несколько приближаются к камере.

**Потери  $\alpha$ -частиц в токамаке некруглого сечения.** В [46] был проделан расчет гофрировочных потерь  $\alpha$ -частиц в условиях, максимально приближенных к экспериментальным. В частности, профили температуры и плотности были взяты из уравнений баланса тепла и частиц. Форма магнитных поверхностей также максимально приближена к реальной. Учитывалось смещение магнитной оси по вертикали на 0,5 м из-за наличия однонулевого полоидального дивертора и конечное давление плазмы.

Эти расчеты показали существование более низкие значения потерь частиц и энергии. В аксиально-симметричной системе ( $\delta=0$ ) потери составили всего 0,02—0,04 %, что приблизительно на два порядка меньше, чем давали результаты работы [45] или более ранней работы [43]. Потери энергии  $\alpha$ -частиц с учетом гофрировки не превысили 3 %, что примерно в 3 раза меньше, чем в [45].

Причина такой большой разницы в результатах неясна. Форма магнитных поверхностей не оказывает столь сильного влияния. В [46] расчеты проводились и для круговых поверхностей и дали приблизительно такие же значения потерь. Определенную роль мог сыграть профиль ионной температуры, который в [46] значительно острее, чем в [45], и не имеет максимум  $T_i(0) = 33$  кэВ. Такой профиль изменяет как число столкновений с ионами, так и источник  $\alpha$ -частиц.



Профили гофрировок в [45, 46] также несколько различаются, особенно на внутреннем обводе. Различие гофрировок  $\delta_\pi$  в 3—5 раз может при определенных условиях приводить к заметной разнице стохастических потерь. Уменьшение  $\delta_\pi$  сужает конус стохастического ухода в пространстве скоростей, что, например, в случае слабого рассеяния по питч-углу уменьшает гофрировочные потери.

Другой причиной столь сильного расхождения может быть слишком грубое описание столкновений в [46]. В частности, в этой работе столкновения пролетных частиц были сильно увеличены. Это могло вызвать слишком быстрое охлаждение  $\alpha$ -частиц и соответственно невозможность для пролетных частиц попасть в конус стохастических потерь.

Более детальное сравнение расчетов [45 и 46] вряд ли возможно, поскольку в [46] не были исследованы многие зависимости от параметров и не изучен сам механизм потерь  $\alpha$ -частиц.

### 4.3. Циклотронное взаимодействие частиц высоких энергий с гофрировкой тороидального поля

**Гирокинетическое уравнение.** Рассмотрим специфический механизм потерь частиц высоких энергий, обусловленный циклотронным взаимодействием частиц с возмущениями магнитного поля. Гофрировка представляет собой периодическое по  $\varphi$  возмущение магнитного поля с волновым вектором  $k=N/R$ . Если скорость частицы велика, то при движении вдоль магнитной силовой линии она может попасть в резонанс с циклотронным вращением

$$\omega_B = k_{\parallel} v_{\parallel} = N v_{\parallel} / R. \quad (4.8)$$

Влияние циклотронного резонанса на движение частиц рассматривалось в [52—54]. Однако в [52] резонанс изучался в однородном магнитном поле, что оправдано только при  $Nq\delta \gg \varepsilon$ . Поэтому в приложении к токамакам будем опираться на [53, 54], где существенно использовалась неоднородность магнитного поля.

Из-за неоднородности магнитного поля скорость продольного движения частиц меняется во времени, поэтому резонанс (4.8) имеет локальный характер. Циклотронное взаимодействие в резонансных точках приводит к изменению продольной скорости на

$$\Delta v_{\parallel} \sim v\delta \sqrt{\pi Nq/\varepsilon} \cos F, \quad (4.9)$$

где  $F$  — фаза возмущения в точке взаимодействия. Если при каждом последовательном прохождении резонанса фаза  $F$  оказывается случайной, то такой процесс описывает броуновское движение в пространстве скоростей с  $D_v \sim (\Delta v_{\parallel})^2/\tau_i$ , где  $\tau_i$  — время пролета циклической орбиты (для запертых частиц  $\tau_i = 2\tau_b$ ). Поскольку магнитное поле возмущения не зависит от времени, в резонансном процессе сохраняется энергия. Поэтому диффузия в пространстве скоростей носит характер рассеяния по питч-углу с эффективной

частотой

$$v_{ef} \sim \delta^2 N q / (\epsilon \tau_e) \sim \delta^2 N v / r. \quad (4.10)$$

Как известно из неоклассической теории, рассеяние по питч-углу приводит к радиальной диффузии с транспортным коэффициентом

$$\chi_w \sim v_{ef} \rho^2 q^2 / \epsilon^2 \sim \chi_w^{ST}. \quad (4.11)$$

Таким образом, из-за циклотронного резонанса не только банановые, но и пролетные частицы могут испытывать стохастическую диффузию.

Как видно из приведенного выше качественного анализа, для описания процесса циклотронного резонанса недостаточно дрейфовых уравнений, поскольку они уже усреднены по циклотронной фазе. Гамильтонов подход, использованный в [52], позволяет описывать циклотронный резонанс, но разделение гамильтониана на основной и возмущенный в [52] предполагало в нулевом приближении однородное магнитное поле. Чтобы описать локальный характер резонанса, целесообразно уже в нулевом приближении использовать неоднородность магнитного поля. Такую возможность дает гирокинетический подход, в котором в нулевом приближении рассматривается дрейфовый гамильтониан в аксиально-симметричном магнитном поле, а возмущение поля анализируется полностью с учетом циклотронного вращения [55]

$$H = H_0 + H_1 = \frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \mu \bar{B} - \frac{e}{c} v \bar{A}(r), \quad (4.12)$$

где  $\bar{A}$  — векторный потенциал возмущения магнитного поля. Для гофрировочного возмущения (1.5), (1.6) векторный потенциал можно приближенно записать в виде

$$A_{\phi} = \frac{R^2}{N^2} \frac{d\delta}{dr} B \cos(N\varphi). \quad (4.13)$$

С учетом выражения для поперечной скорости  $v_{\perp} = v_{\parallel} \cos \varphi_B$  и радиальной координаты  $r = r_B + \rho \cos \varphi_B$ , где  $r_B$  — радиус ведущего центра ларморовской окружности;  $\varphi_B$  — циклотронная фаза, гамильтониан (4.12) преобразуется к следующему виду:

$$H = \frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \mu \bar{B} + \mu B \delta \cos(N\varphi) - \frac{e B v_{\perp}}{2c} \frac{R_0^2}{N^2} \times \\ \times \frac{d\delta}{dr} [\cos(\varphi_B - N\varphi) + \cos(\varphi_B + N\varphi)]. \quad (4.14)$$

Здесь была учтена связь  $d^2\delta/dr^2 = N^2 R - 2\delta$ , следующая из уравнения (П1.5). Первые два члена в этом гамильтониане описывают движение частиц в аксиально-симметричном поле, третий — гофрировочную поправку к тороидальному полю, а последние два — циклотронные резонансы при движении в прямом и обратном направлениях.

**Определение скачков обобщенного тороидального момента импульса и магнитного момента при прохождении резонанса.** Двумя парами гамильтоновых переменных, которые потребуются в дальнейшем, являются  $(\varphi, M_\Phi)$  и  $(\varphi_B, \text{ст}\mu/e)$ , где  $M_\Phi$  — обобщенный тороидальный момент импульса (1.32). Без учета гофрировочных поправок гамильтониан не зависит от  $\varphi$  и  $\varphi_B$ , и поэтому  $M_\Phi$  и  $\mu$  сохраняются.

Для того, чтобы было легче анализировать циклотронный резонанс, рассмотрим сначала простейший гофрировочный резонанс  $v_{\parallel} = 0$ , исследованный в § 1.2 другими методами. Этот резонанс описывается третьим слагаемым в гамильтониане (4.14). Без учета циклотронных резонансов гамильтониан

$$H = mv_{\parallel}^2/2 + \mu\bar{B} + \mu B\delta \cos(N\varphi) \quad (4.15)$$

не зависит от  $\varphi_B$ , поэтому в этом случае  $\mu$  сохраняется. Уравнение для  $M_\Phi$  согласно (4.15) имеет вид

$$dM_\Phi/dt = -\partial H/\partial\varphi = \mu B\delta N \sin(N\varphi). \quad (4.16)$$

Интегрируя это уравнение по невозмущенной траектории в окрестности резонансной точки

$$\varphi \approx \varphi_r - \frac{ev_{\perp}^2}{4R^2q} \sin(\vartheta_b t^2), \quad (4.17)$$

вычисляем приращение тороидального момента импульса:

$$\begin{aligned} \Delta M_\Phi &= \mu B\delta N \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(N\varphi_r - \frac{ev_{\perp}^2}{4R^2q} \sin \vartheta_b t^2\right) dt = \\ &= mv_{\perp} R\delta (\pi Nq/e |\sin \vartheta_b|)^{1/2} \sin(N\varphi_r \pm \pi/4). \end{aligned} \quad (4.18)$$

В силу сохранения  $\mu$  и  $\omega_h$  продольная скорость не изменяется в гофрировочном резонансе  $v_{\parallel} = 0$ . Поэтому все изменение  $\Delta M_\Phi$  (4.18) обусловлено радиальным смещением частицы

$$D = \frac{c\Delta M_\Phi}{ReB_p} = \rho\delta \left(\frac{q}{e}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi N}{e |\sin \vartheta_b|}\right)^{1/2} \sin\left(N\varphi_r \pm \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.19)$$

Это выражение в точности совпадает с формулой (1.41), полученной в § 1.2 в пределе низкой гофрировки  $\delta \ll e/(Nq)$ .

Найдем теперь приращения  $M_\Phi$  и  $\mu$  при прохождении циклотронного резонанса, когда гамильтониан может быть представлен как

$$H = \frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \mu\bar{B} - \frac{eB_0 v}{2c} \frac{R_0^2}{N^2} \frac{d\delta}{dr} \cos(\varphi_B - N\varphi). \quad (4.20)$$

Уравнения для  $M_\Phi$  и  $\mu$  имеют подобный вид:

$$\frac{dM_\Phi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} = \frac{eB_0 v_{\perp}}{2c} \frac{R_0^2}{N} \frac{d\delta}{dr} \sin(\varphi_B - N\varphi); \quad (4.21)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{e}{mc} \frac{\partial H}{\partial \varphi_B} = -\frac{e}{mNc} \frac{dM_\varphi}{dt}. \quad (4.22)$$

Разлагая, как в (4.17), фазу  $\varphi_B - N\varphi$  в резонансной точке

$$\varphi_B - N\varphi \approx \varphi_{Br} - N\varphi_r + \frac{Nev_\perp^2}{4qR^2} \sin(\vartheta_r t^2),$$

вычисляем приращение тороидального момента импульса при прохождении циклотронного резонанса:

$$\Delta M_\varphi = m\omega_B \frac{R_0^3}{N^2} \frac{d\delta}{dr} \left( \frac{\pi Nq}{\varepsilon |\sin \vartheta_r|} \right)^{1/2} \sin \left( \varphi_{Br} - N\varphi_r \pm \frac{\pi}{4} \right), \quad (4.23)$$

где  $\vartheta_r$  — значение полоидального угла в точке резонанса. Используя связь (4.22), можно сразу найти приращение магнитного момента

$$\Delta\mu = -e\Delta M_\varphi/(mcN). \quad (4.24)$$

Комбинируя  $\Delta\mu$  (4.24) и  $\Delta M_\varphi$  (4.23), получаем, что при циклотронном резонансе координата частицы не меняется, а скорость испытывает скачок на

$$\begin{aligned} \Delta v_{\parallel} &= -\frac{B\Delta\mu}{mv_{\parallel}} = \frac{\Delta M_\varphi}{mR} = \omega_B \frac{R_0^2}{N^2} \frac{d\delta}{dr} \left( \frac{\pi Nq}{\varepsilon |\sin \vartheta_r|} \right)^{1/2} \times \\ &\times \sin \left( \varphi_{Br} - N\varphi_r \pm \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ведущий центр орбиты  $r_0$  (1.31) смещается при этом на

$$\Delta r_0 = \frac{\Delta v_{\parallel}}{\omega_j} = D_B \sin \left( \varphi_{Br} - N\varphi_r \pm \frac{\pi}{4} \right), \quad (4.26)$$

где  $D_B = \frac{R^2}{N^2} \frac{d\delta}{dr} \left( \frac{q}{\varepsilon} \right)^{1/2} \left( \frac{\pi N}{|\sin \vartheta_r|} \right)^{1/2} \sim \delta \frac{R}{\sqrt{N}} \left( \frac{q}{\varepsilon} \right)^{1/2}$ .

#### Оценка стохастической диффузии на циклотронном резонансе.

Если условие стохастической диффузии выполнено, то локальный в пространстве скоростей транспортный коэффициент легко вычисляется в предположении случайности фаз смещения (4.26)

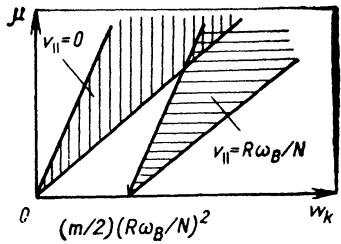
$$\chi_w^{ST} = \frac{2D_B^2}{\tau_t} \sim \delta^2 \frac{q^2}{\varepsilon^3} \frac{R}{N} v. \quad (4.27)$$

Поскольку границы области стохастичности резкие, то везде внутри области стохастичности коэффициент переноса можно считать равным  $\chi_w^{ST}$  (4.27), а вне этой области  $\chi_w^{ST} = 0$ . Таким образом, для оценки эффективности циклотронного механизма потерь наиболее важно определить область стохастичности.

Стохастичность, естественно, может появиться только там, где выполнено условие резонанса (4.8). Область

$$\frac{m}{2} \left( \frac{R\omega_B}{N} \right)^2 + \mu B_0(1 - \varepsilon) < \omega_k < \frac{m}{2} \left( \frac{R\omega_B}{N} \right)^2 + \mu B_0(1 + \varepsilon), \quad (4.28)$$

Рис. 39. Область циклотронного резонанса  $v_{\parallel} = R\omega_B/N$  и резонанса  $v_{\parallel} = 0$



в которой может происходить циклотронное взаимодействие, изображена на рис. 39. Минимальная энергия, с которой начинается этот процесс,  $\omega = (m/2) (R\omega_B/N)^2$ , довольно высока, поэтому даже для  $\alpha$ -частиц условие циклотронного резонанса выполняется только при

$$RB \leq N/3, \quad (4.29)$$

где  $R$  выражено в метрах, а  $B$  — в теслах. Для установки типа INTOR это приводит к очень высокому номеру гармоники ( $N \sim 70$ ) с очень низкой амплитудой в области плазменного шнура. Однако для компактных установок с малым  $R$  условие (4.29) может выполняться для значительно более низких гармоник ( $N \sim 20$ ), которые имеют заметную амплитуду.

Оценим выполнение приближенного критерия стохастичности

$$\left| \Delta r_0 \frac{d}{dr} (\Phi_B - N\Phi) \right| \geq 1. \quad (4.30)$$

Наиболее важным процессом здесь является зависимость винтовости поля от  $r$ . Переходя на другую орбиту, частица подходит к следующему резонансу с тороидальной фазой, изменившейся на  $\Delta r dq/dr$ . Поэтому условие стохастичности (4.30) примет вид

$$D_B N \frac{dq}{dr} = \frac{R^2}{N} \frac{d\delta}{dr} \left( \frac{q}{\varepsilon} \right)^{3/2} \sqrt{\pi N} \frac{dq}{dr} \approx R\delta \left( \frac{q}{\varepsilon} \right)^{3/2} \sqrt{\pi N} \frac{dq}{dr} \geq 1. \quad (4.31)$$

Отсюда нетрудно найти амплитуду  $N$ -й гармоники, при которой происходит переход в стохастический режим:

$$\delta > \delta_c \sim \left( \frac{\varepsilon}{q} \right)^{3/2} \left( R \sqrt{\pi N} \frac{dq}{dr} \right)^{-1} \sim \left( \frac{\varepsilon}{q} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \leq 0,1\%. \quad (4.32)$$

Таким образом, уже при очень низких амплитудах гофрировки может происходить стохастический выход  $\alpha$ -частиц на циклотронном резонансе. Поскольку критерий перехода в стохастический режим (4.32) не зависит от энергии, то при  $\delta > \delta_c$  стохастический выход  $\alpha$ -частиц проявляется сразу во всей области (4.28).

П1. ГОФРИРОВКА МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ТОКАМАКАХ  
С КРУГЛЫМИ КАТУШКАМИ

Стационарное магнитное поле в вакууме удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{B} = \nabla F, \quad \Delta F = 0. \quad (\text{П1.1})$$

Для нахождения возмущенного потенциала  $F$ , описывающего гофрировку, перейдем к тороидальной системе координат  $a, \alpha, \varphi$  со смещенными центрами (см. рис. 4):

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 - L(a) + a \cos \alpha; \\ z &= a \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.2})$$

в которой, как мы ожидаем, гофрировка не будет зависеть от  $\alpha$ . Тогда уравнение (П1.1) преобразуется к виду [1]

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x^k} \right) = 0, \quad (\text{П1.3})$$

где

$$g^{ik} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-L' \cos \alpha)^2} & \frac{-L' \sin \alpha}{a(1-L' \cos \alpha)^2} & 0; \\ \frac{-L' \sin \alpha}{a(1-L' \cos \alpha)^2} & \frac{1-2L' \cos \alpha + L'^2}{a^2(1-L' \cos \alpha)^2} & 0; \\ 0 & 0 & (R_0 - L + a \cos \alpha)^{-2}; \end{bmatrix}$$

$\sqrt{g} = a(R_0 - L + a \cos \alpha)(1 - L' \cos \alpha)$  — детерминант метрического тензора;  $L' = dL/da$ .

Задача состоит в том, чтобы подобрать метрику  $L(a)$ , в которой в первом приближении по малому параметру  $a/L$  решение не будет зависеть от  $\alpha$ . Сохраняя лишь члены не выше первого порядка по  $a/L$ , запишем уравнение (П1.3) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a(R_0 - L)} \frac{\partial}{\partial a} \left[ a(R_0 - L) \frac{\partial F}{\partial a} \right] + \frac{1}{(R_0 - L)^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2} + \\ & + \cos \alpha \left\{ \frac{1}{a(R_0 - L)} \frac{\partial}{\partial a} \left[ (a^2 + a(R_0 - L)L') \frac{\partial \bar{F}}{\partial a} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{L'}{a} \frac{\partial \bar{F}}{\partial a} - \frac{L' + a/(R_0 - L)}{(R_0 - L)^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2} \right\} = 0. \quad (\text{П1.4}) \end{aligned}$$

Для  $N$ -й гармоники возмущения будем искать  $\bar{F}$  в виде  $\bar{F} = F(a) \sin(N\varphi)$ . Не зависящие от  $\alpha$  члены равенства (П1.4) дают уравнение для  $F(a)$

$$\frac{1}{a(R_0 - L_0)} \frac{d}{da} \left[ a(R_0 - L_0) \frac{dF(a)}{da} \right] - \frac{N^2}{(R_0 - L_0)^2} F(a) = 0, \quad (\text{П1.5})$$

решением которого является модифицированная функция Бесселя

$$\tilde{F}(a) = \tilde{F}_0 I_0(aN/(R_0 - L_0)), \quad (\text{П1.6})$$

где  $L_0 = L(0)$ . Члены, пропорциональные  $\cos \alpha$ , дают уравнение для метрики:

$$\frac{d}{da} (a^2 + a(R_0 - L) L') \frac{d\tilde{F}}{da} + 2[a^2 + a(R_0 - L) L'] \frac{d^2\tilde{F}}{da^2} = -a \frac{d\tilde{F}}{da}. \quad (\text{П1.7})$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$L(a) = L_0 - \frac{1}{R_0 - L_0} \int_0^a \left[ x + \frac{R_0 - L_0}{x (F')^2} \int_0^x y (F')^2 dy \right] dx.$$

Второй член в подынтегральном выражении не превышает  $x/4$  при малых  $x$  и ограничен величиной  $(R_0 - L_0)/(2N)$  при  $x \gg (R_0 - L_0)/N$ . Поэтому с хорошей точностью им вообще можно пренебречь:

$$L(a) \approx L_0 - a^2/[2(R_0 - L_0)]. \quad (\text{П1.8})$$

Возмущение тороидального поля является производной потенциала  $\tilde{F}$  по  $\varphi$ :

$$\tilde{B}_\varphi = R^{-1} \partial \tilde{F} / \partial \varphi = R^{-1} \tilde{F}_0 N I_0(aN/(R_0 - L_0)) \cos(N\varphi),$$

поэтому тороидальное поле токамака с учетом гофрировки может быть представлено как [1]

$$B_\varphi = \frac{B_0 R_0}{R} \left[ 1 + \frac{\tilde{F}_0 N}{B_0 R_0} I_0 \left( \frac{aN}{R_0 - L_0} \right) \cos(N\varphi) \right]. \quad (\text{П1.9})$$

Из этого выражения следует формула (1.5), в которой гофрировка для токамаков с круглыми катушками может быть выражена соотношениями (1.7).

Заметим, что знание формы линий  $\delta = \text{const}$  позволяет найти  $r$ - и  $\vartheta$ -составляющие возмущения магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{B}_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \vartheta} \approx \frac{N \tilde{F}_0}{\sqrt{R(R_0 - L_0)}} I_1 \left( \frac{aN}{R_0 - L_0} \right) \frac{L \sin \vartheta \sin(N\varphi)}{\sqrt{r^2 + L^2 + 2rL \cos \vartheta}}; \\ \tilde{B}_r &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} \approx \frac{N \tilde{F}_0}{\sqrt{R(R_0 - L_0)}} I_1 \left( \frac{aN}{R_0 - L_0} \right) \frac{(r + L \cos \vartheta) \sin(N\varphi)}{\sqrt{r^2 + L^2 + 2rL \cos \vartheta}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.10})$$

Амплитуда возмущения поперечного поля остается при этом всегда меньше амплитуды возмущения тороидального поля:

$$\sqrt{\tilde{B}_r^2 + \tilde{B}_\vartheta^2} \approx \frac{\tilde{F}_0 N}{R_0} I_1 < \frac{\tilde{F}_0 N}{R_0} I_0 \approx \tilde{B}_\varphi. \quad (\text{П1.11})$$

## П2. ПОПРАВКА К ГОФРИРОВОЧНОМУ ПЕРЕНОСУ ЛОКАЛЬНО-ЗАПЕРТЫХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для исследования пограничного слоя, разделяющего локально-запертые и банановые частицы, воспользуемся дрейфовым кинетическим уравнением

$$v_{\parallel} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_J \nabla f_m = \frac{m v_i(v) v_{\parallel}}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( v_{\parallel} \mu \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \right). \quad (\text{П2.1})$$

Вдали от границы  $\mu = \omega_k / B_x$  функция распределения  $f_1$  переходит в асимптотические формулы, полученные в § 2.2:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 0 && \text{при } \mu < \omega_k / B_x; \\ f_1 &= \frac{v_d \sin \vartheta}{v_i(v)} \frac{df_m}{dr} \left( 1 - \frac{\mu B_x}{\omega_k} \right) + c_1 && \text{при } \mu > \omega_k / B_x. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.2})$$

Решение задачи фактически сводится к определению константы  $c_1$ , позволяющей плавно сшить асимптотические решения в пограничном слое.

Сглаживание  $f_1$  при переходе от локально-запертых частиц к банановым обеспечивается первым слагаемым в левой части уравнения (П2.1). Именно оно обращает в нуль  $f_1$  при  $\mu < \omega_k / B_x$ . Поэтому при решении кинетического уравнения для пограничного слоя вторым слагаемым можно пренебречь. Отклонение локально-запертых частиц от силовых линий, описываемое этим слагаемым, проявляется лишь в асимптотическом поведении  $f_1$  (П2.2). Таким образом, кинетическое уравнение для пограничного слоя имеет вид

$$\frac{\partial f_{\pm}}{\partial t} = \pm \frac{v v_i(v) m}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu \sqrt{1 - \frac{\mu B(l)}{\omega_k}} \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \mu} \right), \quad (\text{П2.3})$$

где  $f_+$  и  $f_-$  — функции распределения частиц, летящих в положительном и отрицательном направлениях соответственно. Воспользуемся для решения уравнения параболической моделью  $B(l)$  (2.37) и приближенной зависимостью  $\Delta = 2\delta \sqrt{1 - Y^2}$ ,  $Y = r |\sin \vartheta| / (NqR\delta)$ . Тогда, переходя к безразмерным переменным

$$\left. \begin{aligned} z &= lN/(2R); \\ x &= (1 - \mu B_x / \omega_k) (vN / (Rv_i(v) \sqrt{\Delta}))^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.4})$$

преобразуем уравнение (П2.3) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\pm}}{\partial z} &= \pm 4 \frac{\partial}{\partial x} \times \\ &\times \left( \sqrt{1 - z^2 + x (Rv_i(v) / (vN\Delta^{1/2}))^{1/2}} \frac{\partial f_{\pm}}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Характерный масштаб изменения  $x$  в пограничном слое  $|x| \ll 1$ ,



поэтому слагаемым порядка  $x(\tau_l/\tau_\delta)^{1/2}$  в подкоренном выражении при  $\tau_l \ll \tau_\delta$  можно пренебречь. Преобразуя еще раз продольную координату  $\varphi = 2(\arcsin z + z\sqrt{1-z^2})$ , получаем окончательно [22]:

$$\partial f_{\pm} / \partial \varphi = \pm \partial^2 f_{\pm} / \partial x^2. \quad (\text{П2.5})$$

Границы областей, занятых локально-запертыми и банановыми частицами, в переменной  $x$  лежат очень далеко ( $|x| \geq (\tau_\delta/\tau_l)^{1/2} \gg 1$ ), поэтому при анализе пограничного слоя  $|x| \sim 1$  их можно считать бесконечными. Таким образом, в переменных  $x, \varphi$  функции  $f_+$  и  $f_-$  определены в бесконечной полосе  $|\varphi| \leq \pi$ . Граничными условиями для уравнения (П2.5) являются равенства функций  $f_+$  и  $f_-$  в точках отражения и равенство нулю гофрированной поправки  $f_+$  для банановых частиц, подлетающих к сепаратрисе:

$$\left. \begin{aligned} f_+(x, \pm \pi) &= f_-(x, \pm \pi) \quad \text{при } x < 0; \\ f_+(x, -\pi) &= 0, \quad f_+(x, \pi) = f_-(x, \pi) \quad \text{при } x > 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.6})$$

Уравнения (П2.5) с граничными условиями (П2.6) решаются методом Винера—Хопфа подобно тому, как это было сделано при анализе пограничного слоя в аксиально-симметричных системах [56]. Введем левостороннее и правостороннее преобразования Фурье

$$\left. \begin{aligned} S_{\pm}(k, \varphi) &= \int_{-\infty}^0 f_{\pm}(x, \varphi) \exp(ikx) dx; \\ R_{\pm}(k, \varphi) &= \int_0^{\infty} f_{\pm}(x, \varphi) \exp(ikx) dx, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.7})$$

аналитические соответственно в нижней и верхней полуплоскостях. Граничные условия (П2.6) приводят к следующим связям для  $S$  и  $R$ :

$$\left. \begin{aligned} S_+(k, \pm \pi) &= S_-(k, \pm \pi); \\ R_+(k, \pi) &= R_-(k, \pi); \\ R_+(k, -\pi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.8})$$

Подстановка соотношений (П2.7) в уравнения (П2.5) дает еще две связи для  $S$  и  $R$ :

$$\left. \begin{aligned} R_+(k, -\pi) + S_+(k, -\pi) &= [R_+(k, \pi) + S_+(k, \pi)] \exp(2\pi k^2); \\ R_-(k, \pi) + S_-(k, \pi) &= [R_-(k, -\pi) + S_-(k, -\pi)] \exp(2\pi k^2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.9})$$

Комбинируя уравнения (П2.8), (П2.9), приходим к равенству

$$R_-(k, -\pi) = S_-(k, -\pi) [\exp(-4\pi k^2) - 1]. \quad (\text{П2.10})$$

Представим функцию  $\exp(-4\pi k^2) - 1$  в виде частного двух функций  $L$  и  $U$ , аналитических соответственно в нижней ( $\text{Im } k < 0$ ) и верхней ( $\text{Im } k > -1/2$ ) полуплоскостях:

$$\exp(-4\pi k^2) - 1 = L(k)/U(k), \quad (\text{П2.11})$$

где 
$$L(k) = \frac{k^2}{k-i/2} \exp(-q_-); \quad U(k) = -\left(k + \frac{i}{2}\right) \exp(-q_+);$$

$$q_+(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-ia}^{+\infty-ia} \frac{q(z) dz}{z-k}; \quad q_-(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} \frac{q(z) dz}{z-k};$$

$$q(k) = \ln \left\{ \frac{k^2 + 1/4}{k^2} [1 - \exp(-4\pi k^2)] \right\}; \quad a = \frac{1}{2} - \varepsilon; \quad \varepsilon > 0.$$

Множители  $k^2/(k-i/2)$  и  $k+i/2$  введены для компенсации набега фазы на  $2\pi$  при переходе от  $\text{Re } k \rightarrow -\infty$  и  $\text{Re } k \rightarrow +\infty$ . Построим теперь функцию

$$\Psi(k) = \begin{cases} S_-(k, -\pi) L(k) & \text{при } \text{Im } k < 0; \\ R_-(k, -\pi) U(k) & \text{при } \text{Im } k > 0, \end{cases}$$

определяемую любым из этих выражений в общей области аналитичности. Функция  $\Psi(k)$  аналитична на всей комплексной плоскости и является целой функцией. Из асимптотического поведения  $S \sim k^{-1}$  и  $L \sim k$  при  $|k| \rightarrow \infty$  видно, что  $\Psi(k) = A = \text{const}$ . Поэтому  $S_-(k, -\pi)$  и  $R_-(k, -\pi)$  могут быть представлены как

$$S_-(k, -\pi) = A/L(k); \quad R_-(k, -\pi) = A/U(k).$$

Произведя обратное преобразование Фурье, с учетом связей (П2.8), (П2.9) и уравнений (П2.5) найдем искомые функции распределения:

$$\left. \begin{aligned} f_+ &= \frac{A}{2\pi} \int_{+\infty-10}^{+\infty-10} \frac{1}{L(k)} \exp[-ikx - k^2(\varphi + \pi)] dk; \\ f_- &= \frac{A}{2\pi} \int_{+\infty-10}^{+\infty-10} \frac{1}{L(k)} \exp[-ikx + k^2(\varphi - 3\pi)] dk. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.12})$$

Для нахождения константы  $c_1$  (П2.2) требуется вычислить лишь асимптотическое поведение  $f_+$  и  $f_-$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Это легко сделать, сместив контур интегрирования в верхнюю полуплоскость. Тогда при  $x \rightarrow -\infty$  вклад в интеграл будет давать только вычет при  $k=0$ :

$$\begin{aligned} f_{\pm} &= f_{\pm} \Big|_{x \rightarrow -\infty} = iA \frac{d}{dk} \left[ \left( k - \frac{i}{2} \right) \exp(-q_- - ikx) \right] \Big|_{k=0} = \\ &= c \left( x - 2 + i \frac{dq_-}{dk} \Big|_{k=0} \right). \end{aligned} \quad (\text{П2.13})$$

Производная  $dq_-/dk$  вычисляется непосредственно из формул (П2.11):

$$\frac{dq_-}{dk} \Big|_{k=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} \frac{q(z)}{z^2} dz = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{8\pi}{\exp(4\pi z^2) - 1} - \frac{2}{z^2(4z^2+1)} dz \approx 0,9i.$$

Подставив асимптотику (П2.13) в формулу (П2.2) и перейдя к координате  $\mu$  (П2.4), найдем функцию распределения локально-захваченных частиц с учетом пограничного слоя [22]:

$$f_1 = \frac{v_d \sin \vartheta}{v_i(v)} \frac{df_m}{dr} \left[ 1 - \frac{\mu B_x}{\omega_k} - 2,9 \left( \frac{Rv_i \sqrt{\Delta}}{vN} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{П2.14})$$

Для нахождения потока, обусловленного пограничным слоем, подставим найденную поправку в формулу (2.32). После несложных вычислений, аналогичных проделанным в § 2.2, получим следующие выражения для дополнительных потоков тепла и частиц:

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ Q/T \end{bmatrix} = \frac{\delta^{3/2} G_b}{v_i} \left( \frac{v_i R}{N\delta^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{T}} \right)^{1/2} \left( \frac{cT}{eBR} \right)^2 n \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \ln f_{m0}/dr \\ d \ln T/dr \end{bmatrix}, \quad (\text{П2.15})$$

где

$$G_b = \frac{9\sqrt{2}}{128\pi} \frac{N}{vR\sqrt{\delta}} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta J_S \left( \frac{\Delta}{2\delta} \right)^{1/2} d\vartheta;$$

$$I_n = \frac{64}{27\pi^2} 2,9 \left( \frac{3\sqrt{2\pi}}{4} \right)^{1/2} \int_{U_\delta}^{U_d} \frac{U^{2+n} e^{-U}}{[C(\sqrt{U})]^{1/2}} dU;$$

$J_S$  — продольный адиабатический инвариант для сепаратрисных частиц. Оценим роль теплопроводности пограничного слоя в случае  $\delta < \varepsilon/(Nq)$ , воспользовавшись параболической моделью ямы (2.57). Тогда  $G_b$  легко вычисляется:

$$G_b = \frac{9}{16\alpha^3} \int_0^1 Y^2 \left( \frac{\Delta(Y)}{2\delta} \right)^{1/2} dY \approx \frac{0,02}{\alpha^3}.$$

Подставив теперь предельные значения интегралов  $I_n$  при  $U_\delta \rightarrow 0$  и  $U_d \rightarrow \infty$  в формулу для  $\chi^{TH}$ , найдем полную теплопроводность локально-захваченных частиц с учетом пограничного слоя:

$$\chi^{TH} \approx \frac{0,5\delta_0^{3/2}}{v_i} \left( \frac{Nq\delta_0}{\varepsilon} \right)^3 \left( \frac{cT}{eBR} \right)^2 \left[ 1 + 1,2 \left( \frac{v_i R}{N\delta^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{T}} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{П2.16})$$

### П.3. ТРАНСПОРТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ЗАХВАТА БАНАНОВЫХ ЧАСТИЦ

В § 2.3 были получены уравнения, описывающие гофрированную поправку к функции распределения с учетом переходов между банановыми и локально-запертыми частицами (2.47), (2.48). Решение уравнения (2.48) в основном тексте рассмотрено только в предельном случае низкой вероятности захвата банановых частиц в магнитные пробки, когда функция распределения на банановых участках орбиты ( $B$  и  $C$  на рис. 20) искажается слабо. Рассмотрим теперь общий случай [27].

Ограничимся, как и в § 2.3, только случаем низкой гофрировки  $\delta \ll \varepsilon / (Nq)$ , когда отклонения локально-запертых частиц от магнитной поверхности малы. Пренебрежем также смещением банановых частиц относительно силовой линии, отбрасывая таким образом неклассические эффекты. Тогда функцию распределения  $f_0$ , входящую в уравнение (2.48), можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} f_0|_{B,C} &= f_m(r) + c(\mu); \\ f_0|_A &= f_m(r) + c(\mu) + (\Delta r_m - \Delta r) \frac{df_m}{dr} = \\ &= f_m(r) + c(\mu) + \frac{r(\vartheta_b^2 - \vartheta^2) v_d}{2(v_d + v_E)} \frac{df_m}{dr}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П3.1})$$

где  $\vartheta_b$  — полоидальный угол вершины серповидной орбиты (см. рис. 20). Функция  $c(\mu)$  постоянна на траектории и определяется ее параметрами. Вид траектории при фиксированном радиусе удобно задавать с помощью переменной  $\kappa = \vartheta_b^2$ . Связь  $\mu$  и  $\kappa$  для банановых и локально-запертых частиц различна. На участках  $B$  и  $C$  из уравнения  $\mu B(r, \vartheta_b) = \omega_k$  следует:

$$\kappa|_{B,C} = \left\{ \arccos \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\mu B_0}{\omega_k} - 1 \right) \right] \right\}^2 \approx 2 \left[ 1 - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\mu B_0}{\omega_k} - 1 \right) \right]. \quad (\text{П3.2})$$

На участке  $A$   $\kappa$  находится из условия выхода из магнитных пробок (2.50). Воспользовавшись простой моделью ямы, когда  $J_S$  и  $J_l$  выражаются формулами (2.57), а также параболической зависимостью глубины ямы от полоидального угла (2.58), получим

$$\kappa|_A = \kappa_m \left[ 1 - \frac{1 + \varepsilon \cos \vartheta - \mu B_0 / \omega_k}{2\delta} \right], \quad (\text{П3.3})$$

где  $\kappa_m = \vartheta_m^2$ .

Для нахождения  $c(\mu)$  подставим  $f_0$  вида (П3.1) в уравнение (2.48) и перейдем от  $\mu$  к переменной  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\kappa} \left\{ \mu(\kappa) \left[ \left( \frac{2B_0}{\omega_k \varepsilon} \right)^2 \frac{\pi R q}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \omega_k}{m}} (2 - \rho) \kappa \frac{dc}{d\kappa} + \left( \frac{\kappa_m B_0}{2\delta \omega_k} \right)^2 \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{4\delta r \omega_k \sqrt{\kappa}}{m(v_d + v_E)} \frac{\kappa_m - \kappa}{\kappa_m} \rho \left( \frac{dc}{d\kappa} + \frac{r v_d}{2(v_d + v_E)} \frac{df_m}{dr} \right) \right] \right\} = 0. \quad (\text{П3.4}) \end{aligned}$$

Здесь были использованы приближенные значения адиабатических инвариантов:

$$N_A J_I = \frac{2\kappa^{1/2} r}{v_d + v_E} \frac{B_0 J_I}{m \partial J_I / \partial \mu} = \frac{4r\kappa^{1/2} \omega_k \delta}{m (v_d + v_E)} \frac{\kappa_m - \kappa}{\kappa_m};$$

$$J_b \approx \pi q R \sqrt{\frac{\varepsilon \omega_k}{m}} \kappa,$$

соответствующие простой модели модели локальных пробок (2.56) и условию  $\vartheta_b \ll 1$ . При решении уравнения (П3.4) потребуем не только отсутствия дивергенции столкновительного потока, но и обращения в нуль самого потока. Тогда из (П3.4) получим

$$\frac{dc}{d\kappa} = - \frac{Z(\kappa)}{1 + Z(\kappa)} \frac{r v_{dr}}{2(v_E + v_{dr})} \frac{df_m}{dr}, \quad (\text{П3.5})$$

где  $Z(\kappa) = \frac{Nq \sqrt{\delta}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{P(\sqrt{\kappa/\kappa_m})}{8\sqrt{2} \pi^2} \frac{\kappa_m - \kappa}{\kappa_m} \approx \frac{Nq \sqrt{\delta}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \frac{\kappa_m - \kappa}{\kappa_m} \times$   
 $\times \arccos \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa_m}};$

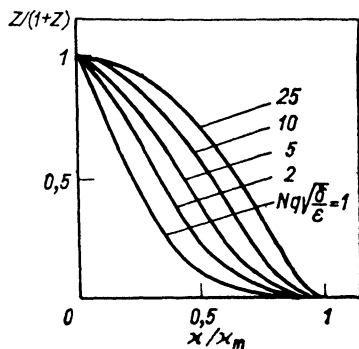
$P$  — коэффициент, входящий в вероятность захвата и приближенно определяемый формулой (1.62). Зависимость  $Z/(1+Z)$  от  $\kappa/\kappa_m$  при различных значениях параметра  $Nq\sqrt{\delta}/\varepsilon$  изображена на рис. 40.

Пределу низкой вероятности захвата соответствует случай  $Z \ll 1$ . При этом  $dc/d\kappa$  и поправка к функции распределения согласно уравнению (2.47) дается формулой (2.61). В общем случае подстановка  $f_0$  вида (П3.1) в уравнение (2.47) с учетом найденного значения  $dc/d\kappa$  приводит к следующему выражению:

$$f_1 = \frac{1}{1 + Z(\kappa)} \frac{v_i(v) m \omega_B R z_m^2 \vartheta}{4\omega_k \delta (1 + v_E/v_d)^2} \frac{df_m}{dr}. \quad (\text{П3.6})$$

Помимо множителя  $(1+Z)^{-1}$ , описывающего конечную вероятность захвата банановых частиц в пробки, здесь появился мно-

Рис. 40. Зависимость  $Z/(Z+1)$  от угла точки отражения замкнутой орбиты  $\kappa/\kappa_m = \vartheta_b^2/\vartheta_m^2$  при различных значениях параметра  $Nq\sqrt{\delta}/\varepsilon$



житель  $(1+u_E/u_d)^{-2}$ , связанный с учетом радиального электрического поля. Используя теперь в выражении для потока (2.32) поправку (ПЗ.6) вместо (2.61), получим, что радиальные потоки при произвольной вероятности захвата также описываются формулой (2.65), но геометрический фактор  $A_2$  и интегралы по энергии  $I_n$  имеют другой вид:

$$I_n = \int_{U_d}^{\infty} \frac{U^{n-2} C(\sqrt{U})}{(1+E_0/U)^2} e^{-U} dU; \quad (\text{ПЗ.7})$$

$$A_2 = \frac{3}{8\pi} \left( \frac{r}{z_m} \right)^3 \int_{-\vartheta_m}^{\vartheta_m} \frac{\Delta(\vartheta) \vartheta^2 d\vartheta}{2\delta(1+Z)} =$$

$$= \frac{3}{4\pi} \int_0^1 \frac{(1-x^2)x^2 dx}{1 + \frac{Nq\sqrt{\delta}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1-x^2}{\pi x^2} \arccos x}. \quad (\text{ПЗ.8})$$

По сравнению с выражением (2.65) в интегралах  $I_n$  учтено влияние электрического поля, что фактически уже сделано в общем выражении (2.89). Геометрический фактор (ПЗ.8) позволяет теперь описывать оба случая: с теплопроводностью (2.9), (2.67) и с теплопроводностью (2.10). При произвольных значениях параметра  $Nq\sqrt{\delta/\varepsilon}$  геометрический фактор  $A_2$  может быть описан следующей формулой:

$$A_2 \approx (10\pi)^{-1} \left[ 1 + 0,25 \sqrt{Nq\delta^{1/2}/\varepsilon^{1/2}} + 0,15 Nq\delta^{1/2}/\varepsilon^{1/2} \right]^{-1}. \quad (\text{ПЗ.9})$$

Множитель в квадратных скобках описывает плавный переход от теплопроводности (2.9) к теплопроводности (2.10). Как видно из формулы (ПЗ.9), этот переход происходит при  $Nq\sqrt{\delta/\varepsilon} \approx 6$ . В случаях, которые могут быть описаны диффузионным переносом ( $Nq\delta \leq \varepsilon$ ), параметр  $Nq\sqrt{\delta/\varepsilon}$  не превышает  $\sqrt{Nq} \leq 6$ . Максимальное отличие общего выражения (ПЗ.9) от предельного (2.64) дает уменьшение коэффициента теплопроводности в этом диапазоне параметров не более чем в 2 раза. Поэтому в большинстве случаев в пределе низких частот соударений можно пользоваться формулами (2.64) — (2.67) или (2.89), (2.90).

Несколько слов необходимо сказать относительно полученного в [26] коэффициента теплопроводности  $\chi^{RT} \sim v^{1/2}$ . Появление этого потока связано с резким скачком функции  $c(x)$  или ее производной вблизи  $x_m$ . Однако, как видно из рис. 40, при  $Nq\sqrt{\delta/\varepsilon} \leq 10$   $dc/dx$  ведет себя плавно с характерным масштабом  $\Delta x \sim x_m$ . Поэтому никакого дополнительного переноса, пропорционального  $v^{1/2}$ , в диапазоне параметров  $Nq\sqrt{\delta/\varepsilon} \leq 10$  нет.

#### П4. РЕЗОНАНСНЫЙ ПЕРЕНОС БАНАНОВЫХ ЧАСТИЦ

Для исследования переноса банановых частиц при произвольном значении параметра  $Nq\Delta\vartheta_b$  ( $\Delta\vartheta_b$  — полуширина пика функции распределения) воспользуемся тем, что при  $\Delta\vartheta_b \ll 1$  вклад в радиальные потоки дает лишь узкая область вблизи резонансной поверхности  $N\Delta\varphi_b = k\pi$ . Рассмотрим окрестность  $k$ -го резонанса  $N\Delta\varphi_b = k\pi + \beta$  ( $\beta \ll 1$ ). При  $\beta \ll 1$ ,  $D_0 N d(q\vartheta_b)/dr \ll 1$  и  $g \ll 1$ , используя периодичность функции распределения  $f(\varphi_0) = f(\varphi_0 + 2\pi/N)$ , из соотношения (3.52) можно получить резонансный аналог бананово-дрейфового кинетического уравнения [10]

$$\frac{dr}{dt} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_0}{dt} \frac{\partial f}{\partial \Phi_0} - \frac{v_c}{N^2 q^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta_b^2} = - \frac{dr}{dt} \frac{df_m}{dr}, \quad (\text{П4.1})$$

где  $\frac{dr}{dt} = \frac{D_b}{2\tau_b} (\sin F_+ + \sin F_-) = \frac{D_b}{\tau_b} \sin \Phi_0 \cos \left( Nq\vartheta_b - \frac{\pi}{4} \right);$

$$\Phi_0 = N\varphi_0 - k\pi t/\tau_b; \quad \frac{d\Phi_0}{dt} = \frac{N\Delta\varphi_b - k\pi}{\tau_b}.$$

Рассмотрим сначала режим плато. Он реализуется, когда  $v_c$  велико, так что ширина пика функции распределения  $\Delta\vartheta_b$  больше изменения  $\vartheta_b$  на траектории. В этом случае в левой части уравнения (П4.1) можно пренебречь членом  $\partial f/\partial r$ . Полагая вблизи резонанса  $d\Phi_0/dt \approx a_k (\vartheta_b - \vartheta_k)/\tau_b$  ( $a_k = Nd\Delta\varphi_b/d\vartheta_b$ ,  $\vartheta_k$  — резонансное значение  $\vartheta_b$ , определяемое из условия  $N\Delta\varphi_b(\vartheta_k) = k\pi$ ), получаем кинетическое уравнение для режима резонансного плато:

$$\begin{aligned} & \frac{a_k}{\tau_b} (\vartheta_b - \vartheta_k) \frac{\partial f}{\partial \Phi_0} - \frac{v_c(\vartheta_k)}{N^2 q^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta_b^2} = \\ & = - \sin \Phi_0 \cos \left( Nq\vartheta_b - \frac{\pi}{4} \right) \frac{D_b}{\tau_b} \frac{df_m}{dr}. \end{aligned} \quad (\text{П4.2})$$

Решение этого уравнения будем искать в виде  $f = \text{Im}[f_0(\vartheta_b) \exp(i\Phi_0)]$ . Тогда, переходя к переменной  $x = (\vartheta_b - \vartheta_k) Nq/\xi$ , где  $\xi = Nqg/a_k$ , для  $f_0$  получаем уравнение

$$i x f_0 - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = - \cos \left( \xi x + Nq\vartheta_k - \frac{\pi}{4} \right) D_b \frac{\xi^2}{g} \frac{df_m}{dr}. \quad (\text{П4.3})$$

Для радиального переноса существенна лишь  $f = \text{Re}(f_0) \sin \Phi_0$ , поскольку вклад от слагаемого  $\text{Im}(f_0) \cos \Phi_0$  обращается в нуль при интегрировании по  $\varphi_0$  с весом  $\sin(N\varphi_0)$ .

Общее решение уравнения (П4.3) может быть выражено через функции  $\text{Ai}$  и  $\text{Bi}$ :

$$\begin{aligned} f_0(x) = & - \frac{\pi D_b \xi^2}{g} \frac{df_m}{dr} \int \cos \left( \tau \xi + Nq\vartheta_r - \frac{\pi}{4} \right) \times \\ & \times [\text{Ai}(\tau) \text{Bi}(-ix) - \text{Bi}(\tau) \text{Ai}(-ix)] d\tau, \end{aligned} \quad (\text{П4.4})$$

$$\text{где } \text{Ai}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + zt\right); \quad \text{Bi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^3}{3} + zt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + zt\right) dt.$$

Однако для практического анализа поведения  $f_0$  достаточно более простых предельных значений  $f_0$  при  $\xi \ll 1$  и  $\xi \gg 1$ . При  $\xi \ll 1$  ( $g \ll a/(Nq)$ ) имеем

$$f = -\sin \Phi_0 \cos\left(Nq\vartheta_b - \frac{\pi}{4}\right) \frac{D_b}{a_k} \frac{df_m}{dr} P\left(\frac{Nq(\vartheta_b - \vartheta_k)}{\xi}\right) \frac{Nq}{\xi}, \quad (\text{П4.5})$$

где  $P(x) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \cos(xt) dt$  — колоколообразная функция с максимумом  $P_x = P(0) = 3^{-2/3} \Gamma(1/3)$ , полушириной порядка 1 и интегралом  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = \pi$ . Полуширину пика  $f$  при  $\xi \ll 1$  можно оценить как  $\Delta\vartheta_b \sim \xi/(Nq) \ll 1/(Nq)$ . В обратном предельном случае  $\xi \gg 1$  ( $g \gg a_k/(Nq)$ ) из (П4.4) имеем

$$f = -\sin \Phi_0 \cos\left(Nq\vartheta_b - \frac{\pi}{4}\right) D_b \frac{df_m}{dr} \frac{g}{g^2 + a_k^2(\vartheta_b - \vartheta_k)^2}. \quad (\text{П4.6})$$

В этом случае  $\Delta\vartheta_b \sim g/a_k \gg 1/(Nq)$ , поэтому выражение (П4.6) может быть также получено с помощью выделения быстро осциллирующего множителя  $\cos(Nq\vartheta_b - \pi/4)$ . Функция распределения, полученная в § 3.3 этим методом, естественно переходит при  $\gamma = 0$ ,  $g \ll 1$  и  $|\sin(N\Delta\varphi_b)| \ll 1$  в выражение (П4.6). Из сравнения (П4.5) и (П4.6) видно, что интегралы от пиков функции распределения в случаях  $\Delta\vartheta_b \ll 1/(Nq)$  и  $\Delta\vartheta_b \gg 1/(Nq)$  совпадают:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a_k} P\left(\frac{Nq(\vartheta_b - \vartheta_k)}{\xi}\right) \frac{Nq}{\xi} d\vartheta_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{gd\vartheta_b}{g^2 + a_k^2(\vartheta_b - \vartheta_k)^2} = \frac{\pi}{a_k}. \quad (\text{П4.7})$$

Поэтому выражение для коэффициента теплопроводности (3.84), проинтегрированное по резонансной области, сохраняется в режиме резонансного плато независимо от значения параметра  $Nq\Delta\vartheta_b$ .

Перейдем теперь к исследованию резонансного бананового режима. Рассмотрим в первую очередь траектории движения резонансных частиц. При  $\gamma = D_0 N d(q\vartheta_b)/dr \ll 1$  и  $|N\Delta\varphi_b - k\pi| \ll 1$  разностные уравнения (1.43) могут быть преобразованы в дифференциальные:

$$\left. \begin{aligned} dy/d\tau &= (\sin \kappa_+ + \sin \kappa_-)/2; \\ dx_+/d\tau &= \gamma \sin \kappa_- + 2by; \\ dx_-/d\tau &= -\gamma \sin \kappa_+ + 2by; \\ d\Phi/d\tau &= 2by. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.8})$$



Здесь  $y = (r - r_k)/D_b$ ;  $\kappa_{\pm} = F_{\pm} - k\pi$ ;  $b = (D_b/2)Nd\Delta\varphi_b/dr$ ;  $\tau = t/\tau_b$ .  
 Переходя к функциям  $\psi = \kappa_+ - \kappa_-$ ,  $V = \cos \kappa_+ + \cos \kappa_-$ ,  $U = \sin \kappa_+ + \sin \kappa_-$ , преобразуем систему (П4.8) к виду

$$\left. \begin{aligned} d\psi/d\tau &= \gamma U; \\ dV/d\tau &= -2byU; \\ dy/d\tau &= U/2; \\ d\Phi/d\tau &= 2by. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.9})$$

Первые три уравнения (П4.9) дают два интеграла  $\psi = \psi_0 + 2\gamma(y - y_0)$  и  $V = 2\cos \Phi_0 \cos(\psi_0/2) + 2b(y_0^2 - y^2)$ , где  $\psi_0 = 2Nq\vartheta_b - \pi/2 + k\pi$ ,  $y_0$  и  $\Phi_0$  — начальные значения  $y$  и  $\Phi$ . Используя эти интегралы, а также связь  $U^2 + V^2 = 4\cos^2(\psi/2)$ , получаем уравнение траектории резонансной частицы:

$$b \frac{dy^2}{d\Phi} = \pm \left\{ \cos \left[ \gamma(y - y_0) + \frac{\psi_0}{2} \right] - \left( \cos \Phi_0 \cos \frac{\psi_0}{2} + by_0^2 - by^2 \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (\text{П4.10})$$

Анализ траекторий в общем случае затруднителен. Рассмотрим поэтому два предельных случая:  $\gamma^2 \gg b$  и  $\gamma^2 \ll b$ . При  $\gamma^2 \gg b$  величину  $by^2$  в (П4.10) можно приближенно заменить  $by_0^2 + 2by_0(y - y_0)$  и преобразовать уравнение к виду

$$2by_0 \frac{dy}{d\Phi} = \pm \left\{ \cos \left[ \gamma(y - y_0) + \frac{\psi_0}{2} \right] - \left[ \cos \Phi_0 \cos \frac{\psi_0}{2} + 2by_0(y - y_0) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (\text{П4.11})$$

Изменение  $y$  на траектории составляет в этом случае  $\Delta y \sim \gamma^{-1}$  при  $y_0 \leq \gamma/b$  и  $\Delta y \sim (by_0)^{-1}$  при  $y_0 \geq \gamma/b$ . Поэтому отброшенные члены оказываются действительно несущественными ( $b\Delta y^2 \leq b/\gamma^2 \ll 1$ ). Ширина пика функции распределения в резонансном банановом режиме определяется шириной зоны, в которой радиальное смещение частиц перестает расти с приближением к резонансным параметрам. В случае  $\gamma^2 \gg b$  эта зона согласно (П4.11) ограничивается величиной  $y_0 \sim \gamma/b$ , что соответствует  $|N\Delta\varphi_b - k\pi| \sim \gamma$ . Из этой оценки найдем ширину пика  $\Delta\vartheta_b \sim \gamma/a_k$ , где  $a_k = N\Delta\varphi_b/(d\vartheta_b)$ . С другой стороны отношение параметров  $b$  и  $\gamma$  может быть оценено как  $b/\gamma \sim a_k/(Nq)$ , поэтому рассматриваемый предел соответствует  $\gamma \gg a_k/(Nq)$  или  $\Delta\vartheta_b \gg 1/(Nq)$ . Таким образом, при  $\gamma^2 \gg b$  кинетическое уравнение (П4.1) в резонансном банановом режиме может быть решено методом, изложенным в § 3.3. Резонансный пик задается при этом выражением (3.69) в пределе  $g \ll \gamma \ll 1$ :

$$I_w = g/[a_k^2(\vartheta_b - \vartheta_k)^2 + 0,46\gamma^2]. \quad (\text{П4.12})$$

Интеграл от  $I_w$  по области пика, определяющий коэффициент переноса, равен  $1,47\pi g/(\gamma a_k)$ . Отметим кстати, что уравнение траекторий (П4.11), справедливое при  $\gamma^2 \gg b$ , оправдывает приближение постоянного  $\Delta\varphi_0(r)$ , использованное при численном решении

кинетического уравнения в § 3.4. Действительно, уравнение (П4.11) соответствует системе (П4.8), в которой в правых частях  $y$  заменен на  $y_0$ , а такая система уравнений, в свою очередь, соответствует различным уравнениям (3.61) с  $\Delta\varphi_b = \text{const}$ .

Рассмотрим теперь предел  $\gamma^2 \ll b$ . В этом случае в уравнении (П4.10) можно положить  $\gamma = 0$ . Тогда из (П4.10) сразу находится интеграл движения:

$$J = by^2 + \cos(\psi_0/2) \cos \Phi. \quad (\text{П4.13})$$

Изменение  $y$  на траектории ограничивается величиной  $\Delta y \leq b^{-1/2}$ , поэтому член, пропорциональный  $\gamma$ , оказывается действительно малым:  $\gamma(y - y_0) \leq \gamma b^{-1/2} \ll 1$ . Решение уравнения (П4.1) с интегралом движения (П4.13) в пределе низких частот соударений ( $v_c \tau_b \ll N^2 q^2 b^{3/2} / a_h^2$ ) хорошо известно из неоклассической теории переноса [35]:

$$f = \frac{\tau_b v_c a_h^2 D_b}{2b^2 N^2 q^2} \frac{df_m}{dr} \int_0^\Phi \frac{\partial}{\partial J} \left( \sqrt{J - \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \Phi} \frac{\partial F_0}{\partial J} \right) d\Phi, \quad (\text{П4.14})$$

где

$$F_0 = - \sqrt{J - \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \Phi} + \frac{\pi}{4} \theta \left( J - \left| \cos \frac{\psi_0}{2} \right| \right) \times \\ \times \int_{\left| \cos \frac{\psi_0}{2} \right|}^J \frac{dJ'}{\sqrt{J' + \left| \cos \frac{\psi_0}{2} \right|} E \sqrt{\frac{2 \left| \cos(\psi_0/2) \right|}{y' + \left| \cos(\psi_0/2) \right|}}};$$

$E$  — полный эллиптический интеграл второго рода. В выражении для радиального потока эта функция описывает пик с полушириной  $\Delta \vartheta_b \sim \sqrt{b} / a \ll 1 / (Nq)$  и интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\vartheta_b) d\vartheta_b = \frac{1}{\pi^2 D_b df_m/dr} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{2\pi/(Nq)} d\vartheta_b \times \\ \times \frac{\sqrt{b}}{a_h} \int_{\cos \frac{\psi_0}{2}}^{\infty} \frac{f(J) dJ}{\sqrt{J - \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \Phi}} = \frac{8}{\pi^{3/2}} \Gamma^2 \left( \frac{3}{4} \right) \times \\ \times \left[ 1 - \int_0^1 \left( \frac{\pi}{2E(t)} - 1 \right) \frac{dt}{t^2} \right] \frac{v_c \tau_b a_h}{N^2 q^2 b^{3/2}} \approx 2,9 \frac{g a_h}{N^2 q^2 b^{3/2}}. \quad (\text{П4.15})$$

Для анализа областей применимости результатов (П4.5), (П4.6), (П4.12) и (П4.15) наиболее существенно отношение интегралов от пиков функции распределения (П4.12) и (П4.15):

$$s = \frac{2a_h^2 \gamma}{\pi N^2 q^2 b^{3/2}} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta (Nq)^{3/2}}}. \quad (\text{П4.16})$$

При  $\Delta\phi_b \geq 1/(Nq)$  переход от резонансного плато к резонансному банановому режиму происходит при энергии  $\omega_0 \sim \omega_d (\varepsilon^2/(Nq\delta^2))^{1/5}$ , для которой  $1,47 g(\omega_0) = \gamma(\omega_0)$  (см. рис. 27). Учитывая зависимость  $g \sim \omega^{-2}$  и  $\gamma \sim \omega^{1/2}$ , нетрудно показать, что переход от режима (П4.5) к (П4.6) осуществляется при  $\omega \approx \omega_0 s^{-4/5}$ , а от (П4.5) к (П4.15) — при  $\omega \approx \omega_0 s^{2/5}$ . Из этих оценок видно, что при  $s \leq 1$  режимы (П4.5) и (П4.15) вообще не реализуются. Формула (3.69) остается при этом справедливой для любых энергий в диапазоне  $g \ll 1$ ,  $\gamma \ll 1$ , а полуширина пика  $\Delta\phi_b$  всегда больше  $1/(Nq)$ . При  $s > 1$  режим резонансного плато продолжается вплоть до  $\omega \sim \omega_0 s^{2/5} \sim \omega_d (\varepsilon/\delta)^{3/5} (Nq)^{-1/2}$  [граница  $\omega \sim \omega_0 s^{-4/5} \sim \omega_d (Nq)^{2/5}$  между режимами (П4.5) и (П4.6) не существенна, поскольку на ней не меняется коэффициент переноса]. При повышении же энергии реализуется резонансный банановый режим (П4.15).

Все эти переходы можно описать формулой (3.69), если в ней заменить  $\gamma$  на  $\gamma/(1+s)$ . Поэтому для описания резонансного переноса банановых частиц при произвольных  $Nq\Delta\phi_b$  достаточно модифицировать выражение (3.69), заменив в нем  $\gamma$  на  $\gamma/(1+s)$ . При этом общее выражение для локального в пространстве скоростей коэффициента переноса примет вид

$$I_w = \frac{1 - e^{-4g}}{(1 - e^{-2g})^2 + 4e^{-2g}(\sin^2 N\Delta\phi_b + 0,46\gamma^2/(1+s)^2)} + \frac{1}{1 + \exp(6,9 - 5,5\gamma)}. \quad (\text{П4.17})$$

Эти уточнения, однако, касаются в основном надтепловых частиц, да и то только при очень низкой гофрировке ( $\delta \leq \varepsilon(Nq)^{-3/2}$ ), поэтому для описания гофрировочного переноса банановых частиц в большинстве случаев достаточно результатов § 3.3 и 3.4.

## П5. РАДИАЛЬНЫЕ ПОТОКИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЕ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Для вычисления радиальных потоков в случае магнитных поверхностей произвольной формы воспользуемся системой координат  $\Psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , связанной с аксиально-симметричной составляющей магнитного поля  $\vec{B}$ :  $\Psi = \int B_p ds$  — полоидальный поток;  $\theta = 2\pi \frac{d\Psi}{dV} \int \frac{dl_p}{B_p}$  — полоидальный угол;  $\varphi$  — тороидальный угол, совпадающий с углом  $\varphi$  в тороидальной системе координат (см. рис. 1). В этих формулах  $dl_p = B_p dr/B_p$  — элемент длины на магнитной поверхности, ортогональный  $\nabla\varphi$ ;  $V$  — объем, ограниченный магнитной поверхностью  $\Psi$ ;  $dV/d\Psi = \oint dl_p/B_p$  — производная объема по полоидальному потоку.

Магнитное поле идеального аксиально-симметричного токама-

ка выражается через градиенты координат  $\Psi$  и  $\varphi$ :

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_p = R_0 B_0 \nabla \varphi + (2\pi)^{-1} \nabla \Psi \times \nabla \varphi. \quad (\text{П5.1})$$

Как следует из анализа, проведенного в основном тексте, для расчета потоков гофрировку достаточно учесть только в тороидальной компоненте. Поэтому полное поле может быть представлено в виде

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}} = R_0 B_0 \nabla \varphi (1 + \delta(\Psi, \theta) \cos(N\varphi)) + (2\pi)^{-1} \nabla \Psi \times \nabla \varphi. \quad (\text{П5.2})$$

Глубина магнитных пробок в поле (П5.2), как и в случае круглых поверхностей, определяется формулой (1.14), но параметр  $Y$  в ней несколько отличается от параметра в (1.12):

$$Y = \frac{(B_p \nabla) R}{B_T N \delta} = \frac{1}{2\pi R_0 B_0 N \delta} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \approx \frac{1}{(2\pi R_0)^2 N q \delta} \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (\text{П5.3})$$

При получении этой формулы предполагалось, что поле тока  $B_p$  значительно меньше тороидального  $B_T$ , поэтому полное магнитное поле приближенно выражалось как

$$B \approx B_T + B_p^2 / (2B_T) \approx B_T = B_0 R_0 / R.$$

Выражение для дрейфовой скорости частиц (1.19) уже записано в виде, пригодном для использования в полях общей геометрии. Изменяются лишь проекции на соответствующие оси. Для вычисления потоков поперек магнитной поверхности интерес представляет составляющая скорости вдоль  $\nabla \Psi$ :

$$v_\Psi = \frac{d\Psi}{dt} = (\mathbf{v}_{dr} \nabla) \Psi \approx \frac{\omega_k}{m\omega_B R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = v_d \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (\text{П5.4})$$

Остается справедливым и усредненное по циклическому движению между точками отражения уравнение (1.28). С учетом замечаний § 1.2 оно также приводит к выражению  $v_\Psi$  (П5.4).

Рассмотрим потоки локально-запертых частиц. В режиме высоких частот соударений решение кинетического уравнения в общей геометрии магнитного поля приводит по сравнению с § 2.2 лишь к замене  $\sin \theta$  на  $\partial \Psi / \partial z$  и  $\partial f_m / \partial r$  и  $\partial f_m / \partial \Psi$ . Усреднение потоков по магнитной поверхности в координатах  $\Psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  формально сохраняет свой вид, поскольку

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} A dV = \frac{\partial \Psi}{\partial V} \int \frac{A ds}{|\nabla \Psi|} = \frac{\partial \Psi}{\partial V} \int \frac{A dl_p d\varphi}{2\pi B_p} = \int \frac{A d\theta d\varphi}{4\pi^2}. \quad (\text{П5.5})$$

Поэтому единственное изменение, которое необходимо сделать в формулах (2.31), (2.32), — это замена  $v_d \sin \theta$  на  $v_d \partial \Psi / \partial z$ :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_\Psi \\ Q_\Psi \end{pmatrix} = -\frac{N}{2\pi R m} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \end{pmatrix} v_{dr} d\omega_k \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial z} d\theta \int_{\omega_k/B_x}^{\omega_k/B_n} f_1 \frac{\partial J_1}{\partial \mu} d\mu. \quad (\text{П5.6})$$

Следовательно, обобщение потока локально-захваченных частиц в режиме высоких частот соударений на случай общей геометрии поля сводится к замене  $\sin^2\theta$  в (2.34) на  $(\partial\Psi/\partial z)^2$  и производных  $\partial/\partial r$  в (2.33) на  $\partial/\partial\Psi$ . Следует к тому же учесть, что магнитные пробки определяются в общем случае параметром  $Y$  (П5.3) [57]. Количественное изменение потоков, таким образом, связано с двумя эффектами: изменением проекции дрейфовой скорости на нормаль к магнитной поверхности (П5.4) и изменением области существования пробок  $Y < 1$ . Причем эти эффекты работают в противоположных направлениях. Увеличение проекции скорости дрейфа приводит к сужению области существования пробок, и наоборот.

Для области низких частот соударений выражение для поправки к функции распределения (2.55) уже записано в виде, пригодном для использования в магнитных полях с некруглыми поверхностями. В выражении (2.55) необходимо лишь перейти к переменным  $\Psi, \theta$ , сделав формальную замену  $\partial/\partial\theta$  и  $\partial/\partial r$  на  $\partial/\partial\theta$  и  $\partial/\partial\Psi$ . Потоки поперек магнитной поверхности, как и при высоких частотах соударений, определяются подстановкой  $f_1$  (2.55) в формулу (П5.6).

Заметим, что при учете некруговой геометрии магнитных поверхностей упрощение выражения для потоков с использованием параболической модели  $\Delta(Y)$  (2.58) неоправданно, поскольку эта модель вносит неточность, соизмеримую с отличием реальных магнитных поверхностей от круговых. Поэтому нет смысла обобщать формулы (2.63), (2.64). По этой же причине не будем рассматривать в магнитных полях общей геометрии выражения для потоков в промежуточной области частот соударений, так как они тоже были получены в предположении параболической зависимости  $\Delta(Y)$ .

Рассмотрим теперь потоки банановых частиц в токамаках с некруглыми поверхностями. В магнитном поле вида (П5.1) изменяется выражение для приращения тороидальной фазы за время между отражениями  $\Delta\phi_b$ . Проще всего вычислить эту величину, используя продольный адиабатический инвариант банановых частиц в аксиально-симметричном поле:

$$J_b = 16qR \sqrt{\frac{\mu B}{m}} F(\Psi, \theta_b), \quad (\text{П5.7})$$

$$\text{где } F(\Psi, \theta_b) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\theta_b} \left( \frac{\bar{B}(\Psi, \theta_b)}{\bar{B}(\Psi, \theta)} - 1 \right)^{1/2} d\theta.$$

Уравнение (3.26) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_b &= \frac{\pi mc}{e} \frac{\partial J_b}{\partial\Psi} = \frac{16\pi mcR}{e} \sqrt{\frac{\mu B}{m}} \left( \frac{dq}{d\Psi} F + q \frac{\partial F}{\partial\theta_b} \frac{\partial\theta_b}{\partial\Psi} + q \frac{\partial F}{\partial\Psi} \right) = \\ &= \frac{16\pi qRcm}{e} \sqrt{\frac{\mu B}{m}} \left[ \frac{F}{q} \frac{dq}{d\Psi} - \frac{\partial F}{\partial\theta_b} \left( e \frac{\partial\Phi}{d\Psi} + \mu \frac{dB}{d\Psi} \right) / \mu \frac{\partial B}{\partial\theta} \right]. \quad (\text{П5.8}) \end{aligned}$$

Время пролета между точками отражения для  $J_b$  (П5.7) имеет вид

$$\tau_b = \frac{m}{2} \frac{\partial J_b}{\partial \omega} = 8qR \sqrt{m\mu B} \frac{\partial F}{\partial \theta_b} \frac{\partial \theta_b}{\partial \omega} = 8qR \sqrt{\frac{\mu B}{m}} \frac{\partial F}{\partial \theta_b} / \frac{\partial B}{\partial \theta}. \quad (\text{П5.9})$$

Все производные в формулах (П5.8), (П5.9) берутся в точке отражения  $\theta = \theta_b$ .

Величина гофрировочного смещения в точке отражения вычисляется по формуле (1.39):

$$D_\Psi = v_\Psi \int \tilde{v}^{-1} - \bar{v}^{-1} dl = B v_\Psi \frac{\partial V}{\partial \Psi} \int \tilde{v}^{-1} - \bar{v}^{-1} d\theta = \\ = v_{dr} B \frac{\partial V}{\partial z} \sqrt{\frac{m}{2\mu}} \left[ \int \frac{d\theta}{(\bar{B}(\theta_b) - \bar{B}(\theta) - B_T \delta \cos(N\Phi))^{1/2}} - \right. \\ \left. - \int \frac{d\theta}{(\bar{B}(\theta_b) - \bar{B}(\theta))^{1/2}} \right].$$

Разлагая  $B(\theta)$  в подынтегральном выражении

$$B(\theta) = B(\theta_b) + \frac{\partial B}{\partial \theta} (\theta - \theta_b) = B(\theta_b) + \frac{B_T}{(2\pi R)^2} \frac{\partial V}{\partial z} (\theta - \theta_b)$$

и используя, как и в (1.41), дифференцирование по параметру  $\Psi^{-1}$ , получаем:

$$D_\Psi = \rho \delta(\Psi, \theta) (2\pi R_0)^2 B_0 \sqrt{\pi N q} (\partial V / \partial z)^{-1/2}. \quad (\text{П5.10})$$

Общее выражение для потоков банановых частиц (3.65) в переменных  $\Psi, \theta_b$  имеет вид

$$\left[ \begin{array}{c} \Gamma_\Psi \\ Q_\Psi \end{array} \right] = \frac{1}{16\pi^2 R^3 m^2 q} \int \omega_k \frac{\partial f_m}{\partial \Psi} D_\Psi^2 I_\omega \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \omega_k \end{array} \right] \frac{\partial V}{\partial z} d\theta_b. \quad (\text{П5.11})$$

Локальный в пространстве скоростей коэффициент переноса  $I_\omega$  снова определяется формулами (3.66), (3.71), где  $N\Delta\Phi_b, g$  и  $\gamma$  несколько изменяются с учетом некруглого сечения магнитных поверхностей:

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{m v_i(v) J_b N^2 q^2 B}{2\mu} \left( \frac{\partial B}{\partial \theta} \right)^{-2} = \\ &= 8 \sqrt{2} v_i(v) N^2 q^3 R (2\pi R)^4 v^{-1} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^{-2} F(\Psi, \theta_b); \\ \gamma &= D_\Psi N \frac{dq \theta_b}{d\Psi} = D_\Psi N \left[ \theta_b \frac{dq}{d\Psi} - \right. \\ &\quad \left. - q \left( e \frac{d\Phi}{d\Psi} + \mu \frac{dB}{d\Psi} \right) / \mu \frac{\partial B}{\partial \theta} \right], \end{aligned} \right\} (\text{П5.12})$$

а  $N\Delta\Phi_b$  вычисляется согласно формуле (П5.8).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грибов Ю. В., Цаун С. В., Юшманов П. Н. Препринт ИАЭ-3681/7, М., 1992.
2. Anderson O. A., Furth H. P.//Nucl. Fus. 1972. Vol. 12. № 2. P. 207—213.
3. Stringer T. E.//Nucl. Fus. 1972. Vol. 12, № 6. P. 689—694.
4. Goldston R. J., Towner H. H.//J. Plasma Phys. 1981. Vol. 26. № 2. P. 283—307.
5. Альвен Г. Космическая электродинамика. М.; Изд-во иностр. лит., 1952.
6. Gardner C. S.//Phys. Rev. 1959. Vol. 115. № 4. P. 791—794.
7. Морозов А. И., Соловьев Л. С.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М., Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 3—91.
8. Кадомцев Б. Б.//Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Изд. АН СССР, 1958. Т. 3. С. 285—299.
9. Berk H. L., Galeev A. A.//Phys. Fluids. 1967. Vol. 10. № 2. P. 441—450.
10. Yushmanov P. N.//Nucl. Fus. 1983. Vol. 23. № 12. P. 1599—1612.
11. Kovrizhnykh L. M.//Nucl. Fus. 1984. Vol. 24. № 7. P. 851—936.
12. Галеев А. А., Сагдеев Р. З.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973. Вып. 7. С. 205—273.
13. Goldston R. J., White R. B., Boozer A. H.//Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. № 9. P. 647—649.
14. Юшманов П. Н.//Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35. Вып. 12. С. 501—503.
15. Бакай А. С., Степановский Ю. П. Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981.
16. Goloborod'ko V. Ya., Yavorskij V. A.//Nucl. Fus. 1984. Vol. 24. № 5. P. 627—631.
17. Kadomtsev V. B., Pogutse O. P.//Nucl. Fus. 1971. Vol. 11. № 1. P. 67—92.
18. Connor J. W., Hastie R. J.//Nucl. Fus. 1973. Vol. 13. № 1. P. 221—225.
19. Dnestrovskij Yu. N., Kostomarov D. P., Lysenko S. E.//Nucl. Fus. 1975. Vol. 15. № 6. P. 1185—1188.
20. Uckan N. A., Tsang K. T., Callen J. D.//ORNL/74—5438, 1976.
21. Goldston R. J., Towner H. H.//Nucl. Fus. 1980. Vol. 20. № 6. P. 781—783.
22. Shaing K. C., Callen J. D.//Phys. Fluids. 1982. Vol. 25. № 6. P. 1012—1019.
23. Юшманов П. Н.//Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. Вып. 2. С. 97—100.
24. Shaing K. C., Callen J. D.//Nucl. Fus. 1982. Vol. 22. № 8. P. 1061—1068.
25. Mynick H. E.//Phys. Fluids. 1983. Vol. 25. № 9. P. 2609—2615.
26. Mynick H. E., Hitchen W. N. G.//Nucl. Fus. 1984. Vol. 24. № 3. P. 317—327.
27. Юшманов П. Н. Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 3. С. 581—586.
28. Frieman E. A.//Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. № 2. P. 490—496.
29. Трубников Б. А. Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 98—182.
30. Yushmanov P. N.//Nucl. Fus. 1982. Vol. 22. № 3. P. 315—324.
31. Tani K., Kishimoto H., Tamura S.//Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research//Proc. 8th Int. Conf. Brussels. 1980. Vienna: IAEA. 1981. Vol. 1. P. 631—637.
32. Boozer A. H.//Phys. Fluids. 1980. Vol. 23. № 11. P. 2283—2290.
33. Yushmanov P. N.//Nucl. Fus. 1982. Vol. 22. № 9. P. 1199—1207.
34. Юшманов П. Н.//Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 5. С. 1123—1127.
35. Рютов Д. Д., Ступаков Г. В. Там же. 1978. Т. 240. № 5. С. 1086—1089.
36. Рютов Д. Д., Ступаков Г. В.//Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. Вып. 3. С. 186—189.
37. Юшманов П. Н.//Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 3. С. 606—608.
38. Davidson J. N. Effect of toroidal field ripple on particle and energy transport in a tokamak//Nucl. Fus. 1976. Vol. 16. № 5. P. 731—742.

39. Tsang K. T.//Ibid. 1977. Vol. 17. № 3. P. 557—563.
40. Linsker R., Boozer A. H.//Phys. Fluids. 1982. Vol. 25. № 1. P. 143—147.
41. Hastie R. J., Taylor J. B.//J. Nucl. Fus. 1982. Vol. 22. № 2. P. 269—272.
42. Беляев С. Т.//Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. С. 50—65.
43. Днестровский Ю. Н., Кукушкин А. С., Лысенко С. Е. и др.//Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. М., ИАЭ им. И. В. Курчатова, 1980. Вып. 2.
44. Anderson D., Hamnen H., Lisak M.//Phys. Fluids. 1982. Vol. 25. № 2. P. 353—358.
45. Tani K., Takizuka T., Azumi M., Kishimoto H.//Nucl. Fus. 1983. Vol. 23. № 5. P. 657—666.
46. Hively L. M.//Ibid. 1984. Vol. 24. № 6. P. 779—783.
47. Zajtsev F. S., Smirnov A. P., Yushmanov P. N.//Ibid. 1986. Vol. 26. № 10. P. 1311.
48. Gurevich A. V., Dimant Ya. S.//Ibid. 1978. Vol. 18. № 5. P. 629—645.
49. INTOR Phase Two A. Part 1. Vienna: IAEA. 1983. P. 105.
50. INTOR Phase One, Vienna: IAEA. 1982. P. 99.
51. Hitchon W. N. G., Hastie R. G.//Nucl. Fus. 1983. Vol. 23, № 4. P. 533—535.
52. Hinton F. L.//Plasma Phys. 1981. Vol. 23. № 12. P. 1143—1164.
53. Путвинский С. В.//Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 36. Вып. 9. С. 326—328.
54. Путвинский С. В., Шурыгин Р. В.//Физика плазмы. 1984. Т. 10. Вып. 5. С. 933—940.
55. Wong H. G.//FRCR—230. Univ. of Texas. 1981.
56. Hinton F. L., Hazeltine R. D.//Rev. Mod. Phys. 1976. Vol. 42. № 2. Part 1. P. 239—308.
57. Uckan N. A., Uckan T., Moore J. R.//ORNL/TM—5603, 1976.



## 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Предметом настоящего обзора является определенный круг плазменных явлений, которые не могут быть описаны и поняты в рамках обычной магнитной гидродинамики, но допускают физически наглядное и относительно простое представление в приближении электронной магнитной гидродинамики (ЭМГ). Последняя представляет собой предельный случай многокомпонентной МГД, в котором можно пренебречь движением ионов, а движение электронов сохраняет квазинейтральность.

Как будет видно далее, случай ЭМГ обычно реализуется при условии малости характерного масштаба, коротких характерных времен и токовых скоростей, больших в сравнении с массовой скоростью. При этом нередко рассматривается бесстолкновительная или слабостолкновительная плазма. Гидродинамическое описание такой плазмы используется давно [1—5], и общие границы этого подхода установлены более или менее надежно. В частности, однокомпонентная МГД представляет собой приближение, основанное на малости относительных скоростей компонент (в двухкомпонентном случае — токовой скорости  $u \equiv j/ne$ ) по отношению к средней массовой скорости  $|v_\alpha - v^\infty| \ll v$ . При обратном неравенстве, вообще говоря, реализуется случай ЭМГ.

Правда, универсальных критериев применимости гидродинамического подхода в физике плазмы, и равным образом — критерия применимости МГД или ЭМГ, не существует: так, одножидкостное приближение может быть справедливо и при нарушении выписанного выше неравенства. В большинстве конкретных задач, однако, этот вопрос не вызывает особых затруднений. В качестве примера можно указать на применимость МГД для описания крупномасштабных движений  $a \gg c/\omega_{pi}$  (что соответствует условию  $u \ll v_A \equiv V/\sqrt{4\pi\rho}$ , где  $v_A$  — характерный масштаб гидродинамической скорости). Это достаточно распространенная ситуация в астрофизических задачах, на которые, собственно, и ориентировался основатель магнитной гидродинамики Х. Альфвен. Для лабораторных установок, как правило, пространственные масштабы гораздо меньше, а плотности — больше, так, что может оказаться выполненным и обратное неравенство; при этом  $v_i \ll u \simeq v_e$ , и движением ионов можно пренебречь.

Первые задачи в таком приближении были решены в 60-х годах А. И. Морозовым, В. И. Брызгаловым и А. П. Шубиным [6, 7]. Рассматривался в этих работах по существу эффект Холла; в стационарном случае его описание сводится к уравнению

$$\text{rot} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] = 0. \quad (1.1)$$

Случай коротких характерных времен рассмотрен в работе А. В. Гордеева и Л. И. Рудакова [8], которые для описания непотенциальных высокочастотных неустойчивостей использовали чисто электронное уравнение

$$\frac{4\pi e}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} \left( \frac{1}{n} [\mathbf{B}, \text{rot} \mathbf{B}] + \frac{4\pi}{n} \nabla P_e \right). \quad (1.2)$$

Дальнейшее развитие теории, однако, сдерживалось двумя обстоятельствами. Первое — это существенная неоднородность задач. В отличие от случая одножидкостной гидродинамики не существует ни одного содержательного примера одномерного ЭМГ-течения: все ЭМГ-эффекты как минимум двумерны. Второе — это сложность сравнения с экспериментом: плазменные объекты, эволюционирующие в рамках ЭМГ, как правило, являются короткоживущими и мелкомасштабными образованиями, диагностика которых оставляет желать лучшего. Все же в последние годы в связи с возникшими в физике плазмы потребностями описания высокоэнергетических объектов (в первую очередь систем инерциального УТС) интерес к ЭМГ существенно вырос. В работах недавнего времени она послужила основой для изучения неустойчивостей сильноточного ионного пучка в плазменном канале [9], генерации магнитного поля и филаментации частиц в лазерной короне [10], динамики быстрого z-пинча [11], скинирования поля [12, 13] и ряда других эффектов.

Продемонстрируем переход к приближению ЭМГ, исходя из системы уравнений двухкомпонентной МГД:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_e}{dt} &= -e\mathbf{E} - \frac{\nabla P_e}{n} - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e, \mathbf{B}] + \frac{e}{\sigma} \mathbf{j}; \\ \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} &= Ze\mathbf{E} - \frac{Z\nabla P_i}{n} + \frac{Ze}{c} [\mathbf{v}_i, \mathbf{B}] - \frac{Ze}{\sigma} \mathbf{j}; \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -c \text{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Положим для упрощения дальнейших вычислений  $\sigma = \text{const}$  и  $P_\alpha = P_\alpha(n_\alpha)$ . Тогда (1.3) сводится к системе двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \pi_e &= \text{rot} [\mathbf{v}_e, \text{rot} \pi_e] - \frac{e}{\sigma} \text{rot} \mathbf{j}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \pi_i &= \text{rot} [\mathbf{v}_i, \text{rot} \pi_i] + \frac{Ze}{\sigma} \text{rot} \mathbf{j}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где  $\pi_\alpha = p_\alpha + (e_\alpha/c)A$  — обобщенный импульс компоненты. Если реализуется предел однокомпонентной МГД ( $p_e \rightarrow 0$ ,  $v_e \simeq v_i$ ), а проводимость  $\sigma \rightarrow \infty$ , система (1.4) сводится к хорошо известному уравнению в замороженности поля в веществе. В общем же случае идеальная проводимость приводит к замороженности в каждую компоненту ротора обобщенного импульса данной компоненты. (Для однокомпонентной МГД такое обобщение дано, например, в обзоре [1].) Это утверждение остается справедливым даже в релятивистском случае и при нарушении квазинейтральности.

Уравнением ЭМГ является, собственно, электронное уравнение (1.4), в котором при  $a \ll c/\omega_{pi}$  можно положить  $v_e = j/(ne)$  и решать его независимо от ионного уравнения: ионы создают лишь неподвижный ( $v_i \ll u$ ) фон для быстрых электронных течений. Если кроме того,

$$\partial/\partial t \ll \omega_{Be}, \quad a \gg c/\omega_{pe} \quad (1.5)$$

(доминирование полевой составляющей в  $\pi_e$ ), то это уравнение может быть упрощено и сведено к

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} \left[ \frac{\mathbf{j}}{ne}, \mathbf{B} \right] = -\frac{c}{\sigma} \text{rot} \mathbf{j}, \quad (1.6)$$

которое описывает замороженность  $\mathbf{B}$  в электронный ток и диффузию поля. Второе уравнение ЭМГ (уравнение непрерывности) при  $\partial/\partial t \ll \omega_{pe}$  (малость тока смещения и квазинейтральность течения электронов по ионному фону) записывается как  $\text{div} \mathbf{j} = 0$ . Оно тождественно выполняется в силу уравнения Максвелла:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (1.7)$$

При  $\sigma \rightarrow \infty$  (1.4) [равно как и (1.6)] могут быть записаны в гамильтоновом виде. Канонические переменных  $\lambda$  и  $\mu$ , найденные В. Е. Захаровым [14] ( $\text{rot} \pi_e = [\nabla \lambda, \nabla \mu]$ ), родственны переменным Клебша обычной гидродинамики. В случае, когда инерцией электронов можно пренебречь,  $\mathbf{B} = [\nabla \lambda, \nabla \mu]$ . Для конфигураций с зацепленными линиями  $\mathbf{B}$  ( $\int \mathbf{B} d^3r \neq 0$ ) однозначные переменные Клебша ввести не удастся, но препятствием для гамильтоновости это не является [14]. В приближении ЭМГ главным членом в гамильтониане (а нередко и единственным) оказывается энергия магнитного поля.

Иногда в обоснование применимости уравнения (1.6) включают изэнтропичность течения, т. е.  $P$  и  $n$  связывают уравнением адиабаты. В этом на самом деле нет необходимости; вполне достаточно произвольная зависимость  $P(n)$ , которая и предполагалась при выводе (1.4). Для этого, однако, как и в случае изэнтропического течения, необходимо, чтобы токовая скорость была достаточно велика по сравнению с дрейфовой:

$$u \gg v_{Te} \rho_{Be} / a. \quad (1.8)$$

Если (1.8) не выполнено, нельзя пренебрегать тем, что в каждую точку в данный момент приходят электроны из существенно различных точек. Оценивая величину  $B$  на  $B \sim (c/4\pi)ja$ , приходим к условию

$$\beta = 8\pi nT_e/B^2 \ll 1. \quad (1.8a)$$

Условие (1.8a) ограничивает применимость уравнения (1.6), но, вообще говоря, обратное неравенство не исключает применимости ЭМГ. Зачастую бывает достаточно «разорвать» связь между  $P$  и  $n$ ; тогда в правой части (1.6) возникают члены вида  $[\nabla n, \nabla T]$ , ответственные за генерацию магнитного поля. Но естественным пределом для применимости гидродинамического подхода при  $T \neq 0$  является условие  $\rho_{ve} \ll a$  (см. [1—5]).

Итак, основой ЭМГ являются уравнения (1.6) и (1.7), на базе которых и будет вестись дальнейшее изложение. В зависимости от характера задачи (1.6) может дополняться членами, учитывающими инерцию электронов, эффекты, связанные с электронным давлением (в частности, механизм генерации магнитного поля из-за непараллельности  $\nabla n$  и  $\nabla T$ ), и т. д.

Выбор конкретных примеров и моделей связан главным образом с научными интересами авторов, которые, однако, стремились изложить все наиболее важные аспекты ЭМГ. Так, гл. 2 посвящена исследованию главного механизма эволюции магнитного поля в ЭМГ — токовому сносу. В силу роторности уравнения (1.6) [как видно из (1.3), (1.4), не последнюю роль в этом играют уравнения Максвелла] ЭМГ-течения носят вихревой характер. Общие свойства таких течений в двумерном случае и отличие трехмерных ситуаций рассматриваются в гл. 3. Трехмерная турбулентность обсуждается в гл. 4. Здесь также изучается специфический эффект ЭМГ — ЭМГ-сопротивление. Глава 4 наиболее важна в идеологическом плане. Проблемы, возникающие при практическом применении ЭМГ к реальным ситуациям, обсуждаются в гл. 5 на примере одного из наиболее популярных в физике плазмы объектов — z-пинча. Важным приложением ЭМГ может быть моделирование кинетических эффектов, например, представлением электронов в виде двух или более жидкостей с различной температурой и гидродинамической скоростью [15]. Этому подходу посвящена гл. 6. Он близок к многопучковой модели в теории коллективных явлений, только в нашем случае главный предмет рассмотрения — генерация и перенос магнитных полей. В гл. 7 дается обзор экспериментальных ситуаций, попадающих в рамки применимости ЭМГ, и обсуждаются возможности сравнения теории с экспериментом.

## 2. КОНВЕКТИВНЫЕ СКИНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

### 2.1. Нелинейный скин-эффект

Одним из наиболее характерных свойств ЭМГ является снос магнитного поля током. Особенно ярко это свойство проявляется в задаче о скин-эффекте.

До сих пор проникновение внешнего магнитного поля в плазму нередко рассматривается на базе обычных представлений о его диффузии. Реально же диффузия может быть существенно дополнена или даже перекрыта конвективным переносом.

Действительно, в рамках ЭМГ динамика магнитного поля описывается уравнениями [ср. с (1.6)]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} \left[ \frac{\mathbf{j}}{ne}, \mathbf{B} \right] + c \text{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0; \quad (2.1)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{B}; \quad \sigma = \frac{ne^2}{m} \tau_e. \quad (2.2)$$

Видно, что, вообще говоря, при выполнении неравенства  $\omega_{Be} \tau_e \gg 1$  второй член в (2.1), ответственный за снос замороженного в электроны поля с токовой скоростью  $\mathbf{j}/(ne)$ , доминирует над диффузионным третьим членом. (Заметим, что вследствие принципиальной неоднородности задачи в конкретных ситуациях может потребоваться более тщательная оценка, и в выписанном неравенстве вместо единицы в действительности должен стоять некий геометрический фактор — отношение характерных масштабов в двух взаимно перпендикулярных направлениях — по  $\mathbf{j}$  и ортогонально  $\mathbf{j}$ .) Эти качественные рассуждения полностью подтверждаются точным решением задачи, к которому и переходим.

В соответствии со спецификой рассматриваемого явления наиболее характерное начальное условие для (2.1), (2.2) — скачок поля на границе плазмы с вакуумом, причем вследствие значительного превышения токовой скорости над гидродинамической движением этой границы можно пренебречь. Итак, пусть плазма занимает полупространство  $z > 0$  и в момент времени  $t = 0$  внутри нее  $B = 0$ , а на границе при любом  $t$  — постоянное поле  $\mathbf{B}_0$ . Рассмотрим сначала плоский случай  $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{e}_y$  и  $\partial/\partial y = 0$ . В такой простейшей геометрии уравнение (2.1) может вырождаться в обычное уравнение диффузии. Действительно,

$$[\mathbf{j}, \mathbf{B}] = -c \frac{\nabla B^2}{8\pi} + \frac{c}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}.$$

Второй член в правой части, который только и мог бы дать ненулевой вклад в  $\text{rot}[\mathbf{j}, \mathbf{B}]$ , тождественно равен нулю из-за отсутствия кривизны магнитных силовых линий. Но обращения конвективного члена в нуль не происходит, если учесть возможный градиент концентрации плазмы. В этом случае ( $\sigma = \text{const}$ )

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{c}{8\pi e} \left[ \nabla B^2, \nabla \frac{1}{n} \right] = \frac{c^2}{4\pi \sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (2.3)$$

Пусть градиент концентрации параллелен границе плазмы и перпендикулярен  $B$  (рис. 1) — тогда нелинейный конвективный член приводит к сносу поля по  $z$ . При достаточно малой глубине проникновения, определяемой неравенством  $\partial^2/\partial z^2 \gg \partial^2/\partial x^2$ , (2.3) пере-

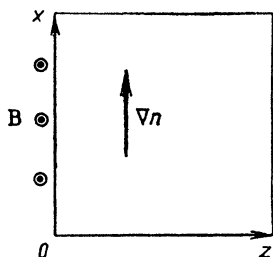


Рис. 1. Геометрия задачи о проникновении поля в плазму из-за градиента концентрации

ходит в уравнение Бюргера:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + kB \frac{\partial B}{\partial z} = D \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}, \quad (2.4)$$

где  $k = \frac{c}{4\pi e} \frac{\partial}{\partial x} n^{-1}$ ,  $D = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ .

Видно, что в начальный момент времени (точнее,  $t < D/(k^2 B_0^2)$ ), когда градиент  $B$  велик, проникновение магнитного поля в плазму определяется, как обычно, диффузией (здесь и проявляется упомянутый выше геометрический фактор). Но после того, как профиль  $B$  станет достаточно плавным, доминирующим оказывается снос поля токовыми электронами, и характер решения резко меняется.

Если векторы  $\mathbf{B}$ ,  $\nabla n$  и направление распространения  $\mathbf{e}_z$  образуют левую тройку, как на рис. 1, то в (2.4)  $k < 0$  и нелинейный вынос поля начинает конкурировать с диффузионным вносом, что приводит при  $t \rightarrow \infty$  к формированию стационарного состояния

$$B = \frac{B_0}{1 - (kB_0/2D)z}. \quad (2.5)$$

Проследить установление этого решения не представляет труда — как известно, уравнение Бюргера заменой  $B = -\frac{2D}{k} \frac{\partial}{\partial z} \ln |\varphi|$  превращается в линейное уравнение диффузии (см., например, [16]). Его решение, соответствующее граничным условиям при  $z=0$ , имеет вид [13]

$$\varphi = -\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right) + \exp\left[\frac{kB_0}{2D}\left(z + \frac{kB_0}{2}t\right)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{z + kB_0 t}{2\sqrt{Dt}}\right). \quad (2.6)$$

Легко заметить, что при  $t \rightarrow \infty$

$$\varphi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} \left(\frac{2D}{kB_0} - z\right),$$

что соответствует (2.5).

При противоположной ориентации векторов  $B_0$  и  $\nabla n$   $k > 0$ , и конвективный член приводит к вносу магнитного поля в плазму даже в случае идеальной проводимости  $\sigma \rightarrow \infty$  ( $D \rightarrow 0$ ). Проникновение поля происходит в виде бегущей с постоянной скоростью

$kB_0/2$  волны, передний фронт которой определяется конкуренцией нелинейности и диффузии:

$$B = \frac{B_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{th} \frac{kB_0}{4D} \left( z - \frac{kB_0}{2} t \right) \right]. \quad (2.7)$$

Формирование этой волны также может быть исследовано аналитически.

Если величина  $1/n(x)$  имеет минимум при некотором  $x$ , которое можно положить равным нулю, то в верхней полуплоскости поле будет проникать в плазму в виде волны (2.7), а в нижней — по закону (2.6) стремиться к стационарному профилю (2.5).

Градиентный механизм проникновения поля в запрещенную область  $z > \delta_{sh}$  известен в физике твердого тела [17, 18]. Если в рассмотренном случае он связан с  $\nabla n$ , то в твердом теле аналогичную роль играет градиент температуры (эффект Нерста—Эттингаузена). В цитированных работах исследовались возникающие вследствие этого эффекта линейные термомагнитные волны.

В более общей геометрии, когда силовые линии магнитного поля не являются прямыми, уравнение эволюции поля даже в однородной по концентрации плазме остается нелинейным:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{c}{4\pi ne} \operatorname{rot}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (2.8)$$

В цилиндрической геометрии  $\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_\varphi \partial/\partial\varphi \equiv 0$  в приближении малой глубины проникновения  $\partial/\partial z \gg 1/r$  оно опять приводится к уравнению Бюргерса (2.4) с  $k = -c/(2\pi ner)$ , и, следовательно, исследованные выше конвективные эффекты — запертие поля на границе и быстрое его проникновение — имеют место и здесь.

Заметим, что хотя уравнение Бюргерса является существенно нелинейным, линейные аналоги рассмотренных явлений хорошо известны как в твердом теле, так и в плазме — это распространяющиеся на фоне большого постоянного магнитного поля дрейфовые колебания и геликоны [4, 19]. Можно сказать, что в нелинейном скин-эффекте конечная величина  $B$  одновременно играет роль амплитуды волны и внешнего поля, в котором она распространяется.

Подчеркнем одно важное обстоятельство. Уравнение Бюргерса (2.4) является не только нелинейным, но и точно интегрируемым — его решения однозначно связаны с решениями линейной теплопроводной задачи. По этой причине задача о проникновении магнитного поля в плазму в рамках ЭМГ, несмотря на существенную нелинейность уравнений, в достаточно стандартной постановке допускает точное аналитическое решение.

## 2.2. Скинковая задача при наличии пучков заряженных частиц

Инжекция в плазму энергичных пучков заряженных частиц, в принципе, может сильно изменить рассмотренную ситуацию — среда становится многокомпонентной. Однако зачастую такие пучки

можно вводить в систему уравнений ЭМГ как «сторонний» ток, дающий вклад в уравнение Максвелла, но не в закон Ома [20—22] [ср. с (2.1), (2.2)]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_b + \mathbf{j}); \quad \mathbf{E} = \frac{1}{nec} [\mathbf{j}, \mathbf{V}] + \frac{\mathbf{j}}{\sigma}. \quad (2.9)$$

В таком приближении пучки хотя и не вносят качественно новых эффектов в конвективный снос поля, но существенно разнообразят задачу.

Остановимся сначала на пределах применимости этого приближения.

Во-первых, представление пучка в виде стороннего тока  $\mathbf{j}_b$ , не зависящего от магнитного поля, означает малое искривление траекторий частиц пучка при их движении, т. е. выполнение неравенства  $\rho_b \gg a$ , где  $a$  — характерный масштаб задачи, или, что то же самое, доминирование в обобщенном импульсе его механической составляющей:  $p_b \gg (e_b/c)A$ . Этому условию можно придать и третью формулировку — малость всех токов в задаче (включая ток пучка) по сравнению с альфвеновским током пучка (при геометрическом факторе порядка единицы):

$$I \ll I_{Ab} \equiv \frac{m_b c^3}{e_b} \beta_b \gamma_b.$$

Во-вторых, такое представление означает пренебрежение ввиду достаточно большой энергии частиц их кулоновским трением о среду, что возможно при  $j_b / (n_b e) \gg v_{Te}$ . В противном случае необходимо, вообще говоря, учитывать увеличение электронов плазмы частицами пучка во втором уравнении (2.9).

Нарушение этих условий обсуждается в гл. 6; если же они выполнены, то вместо (2.8) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{c}{4\pi n e} \operatorname{rot} (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} - \frac{1}{ne} \operatorname{rot} [\mathbf{j}_b, \mathbf{V}] = \frac{c^2}{4\pi \sigma} \Delta \mathbf{V} + \frac{c}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{j}_b. \quad (2.10)$$

При выводе (2.10) мы положили  $n = \text{const}$  с целью сосредоточить внимание на эффектах, связанных с  $\mathbf{j}_b$ . Таковыми согласно (2.10) являются объемная генерация поля сторонним током (она также исследована в гл. 6) и рассматриваемая ниже линейная конвекция магнитного поля обратным током пучка, описываемая последним членом в левой части (2.10).

Для ее иллюстрации обратимся снова к модельной плоской задаче. Пусть пучок «ленточной» или «ножевой» геометрии пронизывает плоский слой плазмы  $0 < z < a$ :  $\mathbf{j}_b \parallel \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{V} \parallel \mathbf{e}_y$  (рис. 2). В начальный момент  $t=0$  обратный ток в проводящей среде полностью компенсирует ток пучка и  $\mathbf{V}=0$ . Вне проводящего слоя в любой момент времени  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$ , где  $\mathbf{V}_0$  — магнитная индукция собственного поля пучка. Уравнение (2.10) вырождается в таком приближении в линейное [ср. с (2.3)] и при  $d/dz \gg d/dx$  переходит в

$$\frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial z} = D \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}; \quad u = \frac{i_b}{ne}.$$



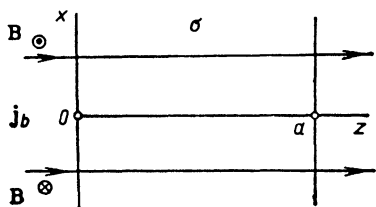


Рис. 2. Геометрия задачи о вносе поля в плазму пучком частиц

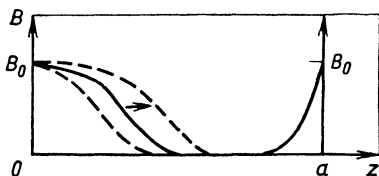


Рис. 3. Внос поля пучком (плоская геометрия)

Решение его с качественной точки зрения аналогично рассмотренному решению (2.4). Слева ( $z=0$ ) поле вносится в проводник с токовой скоростью  $u$ , так что глубина «скин-слоя» растет пропорционально  $t$ :

$$B = \frac{B_0}{2} \left[ \exp\left(\frac{uz}{D}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z+ut}{2\sqrt{Dt}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{z-ut}{2\sqrt{Dt}}\right) \right].$$

Справа ( $z=a$ ) вследствие конкуренции диффузионного проникновения и линейного выноса поля устанавливается стационарный профиль

$$B = B_0 \exp\left[\frac{u}{D}(z-a)\right],$$

т. е. эффективная глубина проникновения  $l \sim D/u$ . Общий вид зависимости  $B(z)$  показан на рис. 3.

Отметим интересный эффект: если сторонний ток создается электронным пучком  $j_b = -n_b e v_b$ , то проникновение поля происходит в направлении навстречу пучку. Интересен также возможный эффект вноса стороннего поля, значительно превышающего  $B_0$ . Необходимо только, чтобы оно также было параллельно оси  $Oy$ .

Рассмотрим теперь более реалистическую задачу о цилиндрически симметричном пучке. Система подобна изображенной на рис. 2, но  $0z$  — ось симметрии и  $\partial/\partial\varphi \equiv 0$ . Тогда  $B = B_\varphi$  и (2.10) при  $\frac{\partial}{\partial z} \gg \frac{1}{r}$  переходит в

$$\frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial z} - kB \frac{\partial B}{\partial z} = D \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}; \quad k = \frac{c}{2\pi n e r}. \quad (2.11)$$

Теперь эффективная скорость сноса магнитного поля, как и в (2.1), сама зависит от  $B$ :  $v_{\text{ef}} = u - kB$ . Если  $j_b$  в некоторой окрестности оси симметрии не зависит от  $r$ , то линейный снос доминирует и лишь при  $B = B_0$   $v_{\text{ef}}$  обращается в нуль. Если же, что более вероятно,  $j_b$  падает с радиусом, то существует критическое поле  $B_{\text{cr}} \equiv u/k = 2\pi j_b r/c$ , при котором  $v_{\text{ef}}$  меняет знак.

Динамика проникновения поля в плазму после диффузионного размытия скачка в этом случае достаточно сложная. На левой границе ( $z=0$ ) при  $B < B_{\text{cr}}$  доминирует линейный снос поля, кото-

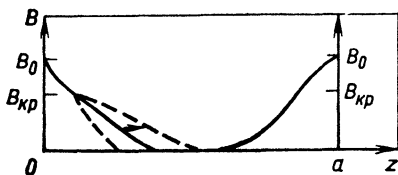


Рис. 4. Внос поля пучком (цилиндрическая геометрия)

рый еще больше сглаживает профиль  $B(z)$ , так что диффузионный член оказывается малым и (2.11) приводится к уравнению простой волны:

$$\frac{\partial}{\partial t}(B - B_{\text{cr}}) - k(B - B_{\text{cr}}) \frac{\partial}{\partial z}(B - B_{\text{cr}}) = 0. \quad (2.12)$$

Решение (2.12) хорошо известно:

$$z = -k(B - B_{\text{cr}})t + f(B - B_{\text{cr}}), \quad (2.13)$$

где функция  $f$  определяется из начальных условий. Сглаживание профиля (2.13) позволяет асимптотически положить  $\partial B/\partial z = 0$  при  $B = B_{\text{cr}}$ . При  $B > B_{\text{cr}}$  вследствие конкуренции нелинейного выноса и диффузии поля устанавливается стационарный профиль  $B$  [ср. с (2.5)]:

$$(B - B_{\text{cr}})^{-1} = kz/(2D) + (B_0 - B_{\text{cr}})^{-1}. \quad (2.14)$$

Особенно интересно в цилиндрической задаче поведение поля на правой границе плазмы. Если  $j_b$  зависит от  $r$  достаточно слабо, так что  $B_{\text{cr}} > B_0/2$ , то, как и в плоском случае, асимптотически  $\partial/\partial t \rightarrow 0$ , но профиль поля теперь имеет точку перегиба:

$$\frac{B - B_{\text{cr}}}{B_{\text{cr}}} = \text{th} \left[ \frac{kB_{\text{cr}}}{2D} (z + z_0) \right], \quad (2.15)$$

где  $z_0$  выбирается из условия  $B(a) = B_0$ . Если же  $B_{\text{cr}} < B_0/2$ , стационарное решение (2.15) невозможно и магнитное поле проникает в плазму в виде бегущей с постоянной скоростью  $v = \frac{kB_0}{2} - u = \frac{k(B_0 - 2B)}{2}$  волны

$$B = \frac{B_0}{2} \left[ 1 + \text{th} \frac{kB_0}{4D} (z + vt) \right] \quad (2.16)$$

[ср. с (2.7)]. В качестве примера на рис. 4 приведен вид решения (2.13) — (2.15) при  $B_{\text{cr}} > B_0/2$ .

Наконец, отметим, что и здесь удастся получить точное решение задачи в рамках уравнения (2.11), которое подстановкой  $b = u - kB = k(B_{\text{cr}} - B)$  снова сводится к уравнению Бюргерса.

В частности, вместо (2.13)—(2.14) можно найти аналогичное (2.6), но существенно более громоздкое выражение [12]. Разобранные эффекты могут иметь место в ионном диоде [22] или при инжекции пучка в плазму [12, 13, 21].

В заключение укажем, что, несмотря на одномерный вид уравнений (2.4), (2.11), задача в действительности существенно неодномерна. Так, конвекция поля по  $z$  связана не только и даже не столько с током  $j_z$  [в рамках (2.4) он может вообще отсутствовать], сколько со сносом его перпендикулярным  $e_z$  током  $j_x$  или  $j_r$ . Нетрудно видеть, что в реальной геометрии при ограниченной в ортогональном  $e_z$  направлении плазме происходит токовый перенос магнитной энергии вдоль границ среды из областей запираения поля в области быстрого проникновения в полном соответствии с полученными решениями.

### 3. УСТОЙЧИВЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ВИХРИ

#### 3.1. Вихрь как фундаментальный объект

Частные решения в виде устойчивых вихрей интересны тем, что они возникают при эволюции достаточно произвольных начальных возмущений. Традиционное построение теории сильной турбулентности по образцу теории Колмогорова—Обухова базируется на насильственном усреднении и не включает никаких частных, даже особо важных решений. В настоящее время ясно, что при эволюции различных систем появляются частные, но относительно универсальные решения, называемые структурами. Полная картина турбулентности, включающая такие структуры, отсутствует. Пока только устанавливаются типы решений, играющих роль структур, и в редких случаях — условия их появления.

Достаточно очевидно, что при распаде пространственно ограниченного возмущения устойчивые решения (если они вообще существуют, а для случая двумерных вихрей мы это покажем) появляются в асимптотике. Совершенно неочевидно, что устойчивые решения могут появиться в результате эволюции в среднем однородного возмущения, занимающего все пространство. Для случая солитонов в неинтегрируемых системах это так [23], а вот для двумерной вихревой турбулентности в наиболее важной среде — идеальной жидкости — ответ неизвестен ни на каком уровне строгости. Нет ответа и для случая электронной гидродинамики.

Далее в этой главе мы будем относительно подробно рассматривать все типы устойчивых вихрей, поскольку они описываются уравнениями, общими для разных сред (см. §3.3). Попытки сузить с помощью термодинамического рассмотрения класс вихрей, играющих существенную роль в асимптотике, едва ли корректны. Критика по этому поводу содержится в обзоре [23].

Отметим также, что все дальнейшее рассмотрение в этой главе ведется на языке интегралов движения — наиболее адекватном для описания устойчивых вихрей.

### 3.2. Вихри в однородной плазме

Основными типами устойчивых вихрей являются монополярные и дипольные, все они реализуют максимум энергии при фиксированных остальных интегралах движения [23—27]. Поскольку интегралов в замороженности бесконечно много, бесконечно много и форм устойчивых вихрей.

В однородной плазме двумерное уравнение в замороженности ротора обобщенного импульса принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \left( \frac{mc}{4\pi ne} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \\ & = \operatorname{rot} \left[ -\frac{c \operatorname{rot} \mathbf{B}}{\partial(x, y)}, \operatorname{rot} \left( \frac{mc}{4\pi ne} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

или в безразмерном виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial(b, \omega)}{\partial(x, y)} \equiv \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (3.2)$$

где  $\omega = b - \Delta b$ .

Из (3.2) сразу можно увидеть, что все конфигурации, у которых линии уровня  $b$  и  $\Delta b$  совпадают (таковы, например, круглые вихри), стационарны.

Устойчивость вихрей удобно выяснить методом интегралов движения. Уравнение (3.2) имеет следующие интегралы движения:

а) энергии

$$\mathcal{E} = \int [b^2 + (\nabla b)^2] d^2 \mathbf{r}; \quad (3.3)$$

б) импульса

$$\mathbf{p} = \int \left( nmv + \frac{ne}{c} \mathbf{A} \right) d^2 \mathbf{r} = \operatorname{const} \int \omega [\mathbf{r}, \zeta] d^2 \mathbf{r}, \quad \zeta \parallel \mathbf{B}; \quad (3.4)$$

в) момента импульса

$$M = \int \omega r^2 d^2 \mathbf{r}; \quad (3.5)$$

г) в замороженности

$$J_F = \int F(\omega) d^2 \mathbf{r}, \quad (3.6)$$

где  $F$  — произвольная функция.

В записи (3.3) видно, что энергия — это сумма магнитной и кинетической энергий, но для исследования устойчивости ее удобнее выразить через сохраняющуюся вдоль траекторий величину  $\omega$ , воспользовавшись следующим из формулы  $\omega = b - \Delta b$  соотношением  $b = \frac{1}{2\pi} \int \omega(\mathbf{r}_1) K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) d^2 \mathbf{r}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int [b^2 + (\nabla b)^2] d^2 \mathbf{r} = \int b \omega d^2 \mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint \omega(\mathbf{r}_1) \omega(\mathbf{r}_2) K_0(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $K_0(r)$  — функция Макдональда.

Для дальнейшего рассмотрения полезна электростатическая аналогия: в электростатике энергия может быть записана и как энергия поля (однократный интеграл по объему), и как энергия взаимодействия зарядов (двукратный интеграл по объему). В нашем случае сохраняющийся «заряд» — это  $\omega(\mathbf{r})$ , а «потенциал взаимодействия»  $K_0(r)$  спадает на малых расстояниях как  $-\ln r$ , а на больших — экспоненциально. «Экранировка» взаимодействия на масштабах, больших  $c/\omega_{pe}$ , связана с учетом энергии и импульса магнитного поля. Если учесть, что потенциал взаимодействия  $K_0(r)$  спадает монотонно, а «заряд»  $\omega(\mathbf{r})$  заморожен в несжимаемую жидкость, то очевидно, что максимум энергии достигается на решениях, в которых «заряды» одного знака максимально сближены. Таковы круглые решения, у которых  $\omega(r)$  — монотонно убывающая от центра произвольная функция [можно дополнительно потребовать быстрого убывания  $\omega(r)$ , чтобы были конечны интегралы (3.3) — (3.6)]. Интересно отметить, что решений, реализующих минимум энергии, не обнаружено.

Устойчивость рассмотренных выше вихрей делается совсем очевидной, если рассмотреть интеграл (3.5), — они реализуют минимум его модуля. Может показаться, что при больших размерах вихря его «энергия связи» экспоненциально мала и вихрь «непрочен», но это не так — просто взаимодействуют фактически лишь соседние участки, как в капле жидкости. В этом случае выражение для энергии упрощается и может быть записано в виде

$$\mathcal{E}' = \text{const} \int (\nabla\omega)^2 d^2\mathbf{r}. \quad (3.8)$$

Получить эту формулу можно следующим образом. Сначала частично выразим  $b$  в формуле (3.3) через  $\omega$ :

$$\mathcal{E} = \int [b^2 + (\nabla b)^2] d^2\mathbf{r} = \int b\omega d^2\mathbf{r} = \int (\omega + \Delta b)\omega d^2\mathbf{r}. \quad (3.9)$$

Выражение  $\int \omega^2 d^2\mathbf{r}$  — интеграл движения, поэтому его можно отбросить, а для оставшейся части использовать малость  $\Delta b \ll b$ , т. е.  $b \simeq \omega$ :

$$\mathcal{E}' = \int \Delta b\omega d^2\mathbf{r} \simeq \int \Delta\omega\omega d^2\mathbf{r} = - \int (\Delta\omega)^2 d^2\mathbf{r} \simeq - \int (\nabla b)^2 d^2\mathbf{r}. \quad (3.10)$$

Таким образом, устойчивые решения минимизируют кинетическую энергию электронов, полная же энергия (с учетом энергии магнитного поля) достигает максимума, поскольку вариация энергии магнитного поля вдвое больше вариации кинетической энергии и противоположна по знаку.

Если вспомнить, что уравнение движения сохраняет импульс (3.4), то можно доказать существование устойчивых некруглых вихрей «дипольного» типа. Рассмотрим два круглых вихря с монотонно спадающей функцией  $|\omega|$ , имеющих размер  $a$  и различающихся лишь знаком «заряда». По отдельности такие вихри устойчивы. Учет интеграла (3.4) означает, что сохраняется расстояние  $l$  между центрами вихрей — «дипольный момент». Если

считать, что  $a \ll l$ , то энергия взаимодействия вихрей мало по сравнению с энергией каждого вихря, и максимум энергии реализуется на паре из двух почти круглых вихрей [24]. Такая пара движется по прямой, перпендикулярной дипольному моменту, переноса с собой электроны и приводя к повышенной теплопроводности.

### 3.3. Новое «универсальное» двумерное уравнение в слабонеоднородной среде

Полученное в этом параграфе уравнение описывает двумерные гидродинамические течения электронной или ионной компоненты плазмы, а также океанов и атмосфер планет. Способностью описывать движения разных сред оно обязано одинаковой структуре интегралов движения этих сред; это уравнение обобщает уравнения Кортевега — де Фриза и Кадомцева — Петвиашвили.

Сходство дрейфовых волн в плазме и волн Россби в атмосфере известно давно. Прежде всего при надлежащем обезразмеривании совпадают дисперсионные зависимости линейных волн, имеющие вид

$$\omega = k_x / (1 + k^2) \quad (3.11)$$

(ось  $y$  в направлении неоднородности). При дальнейшем рассмотрении [23] было обнаружено, что при некоторых упрощающих предположениях совпадают и нелинейные части уравнений, имеющие довольно громоздкий вид. Причина совпадения уравнений обнаружена в [24—26] и связана с вмороженностью ротора импульса в сплошную среду (в случае плазмы — ротора обобщенного импульса в каждую из компонент). Для двумерных движений ротор имеет лишь одну компоненту. Обозначим ее буквой  $z$ , и уравнение вмороженности приобретает вид

$$\partial z / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{v} z = 0. \quad (3.12)$$

Движения плазмы, жидкости и газов часто можно считать несжимаемыми, поэтому двумерная скорость  $\mathbf{v}$  может быть выражена через скаляр  $b$ :

$$\mathbf{v} = [\mathbf{e}_z, \nabla b]. \quad (3.13)$$

Чтобы замкнуть систему (3.12), (3.13), необходимо ввести связь между  $b$  и  $z$ , и одна из простейших связей, учитывающая в первом приближении нелинейность, неоднородность и нелокальность, есть

$$z = b + b^2/2 + y - r_0^2 \Delta b. \quad (3.14)$$

Подставляя (3.13) и (3.14) в (3.12), находим «универсальное» уравнение, к которому мы стремились:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( b + \frac{b^2}{2} + y - r_0^2 \Delta b \right) + \frac{\partial (b, b + b^2/2 + y - r_0^2 \Delta b)}{\partial (\mathbf{x}, y)} = 0. \quad (3.15)$$

Запись в виде уравнения (3.15), которое есть расширенное уравне-

ние (3.2), подчеркивает замороженность ротора в вещество; нередко это уравнение пишется в другом виде [27] с учетом малости некоторых членов в (3.14). Пусть, например главными в (3.14) являются члены  $b+y$ , тогда (3.15) имеет вид

$$\partial b/\partial t + \partial b/\partial x = 0,$$

т. е. в данном приближении  $\partial/\partial t = -\partial/\partial x$ .

Добавляя теперь члены  $-r_0^2 \Delta b + b^2/2$  и заменяя в них  $\partial/\partial t$  на  $-\partial/\partial x$ , получаем:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -b + \frac{b^2}{2} - r_0^2 \Delta b \right) - \frac{\partial (b, r_0^2 \Delta b)}{\partial (x, y)}. \quad (3.16)$$

Такая запись, при которой производная по времени входит простейшим образом, была использована впервые Кортвегом и де Фризом. Она удобна для нахождения интегралов движения. Можно, например, прямым дифференцированием по времени и исключением  $\partial b/\partial t$  с помощью (3.16) убедиться, что сохраняются импульс и энергия [27]:

$$p = \int \frac{b^2}{2} d^2 r, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{E} = \int \left[ \frac{1}{3} b^3 + r_0^2 (\nabla b)^2 \right] d^2 r. \quad (3.18)$$

Для более точного уравнения (3.15) убедиться в существовании аналогичных интегралов не столь просто, а сами аналоги (3.17), (3.18) значительно сложнее.

Вместо (3.14) можно взять

$$z = b - r_0^2 \Delta b + y - by - y^2/2 \quad (3.19)$$

и в результате упрощений снова получить (3.16). Заметим, что уравнение  $K\partial\Phi$  тоже можно получить, учитывая нелинейность либо в уравнении непрерывности, либо в уравнении скорости. Можно также учесть в (3.13) малую сжимаемость и снова прийти к уравнениям (3.15) или (3.16). До сих пор уравнение (3.15) выводилось из общих соображений; для конкретных случаев, например уравнений ЭМГ (1.4), его можно получить упрощением выражения для замороженной величины  $\text{rot } \pi_e$ :

$$-\frac{c}{e} \text{rot } \pi_e = \mathbf{V} + \text{rot } \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \text{rot } \mathbf{V}. \quad (3.20)$$

Для конфигурации неоднородного  $z$ -пинча, возмущения в котором будем считать мелкомасштабными и не зависящими от угла,  $\mathbf{V} = \bar{V}_0(1+b)$ ,  $b \ll 1$ . Запишем (3.20) в плоских ортогональных координатах  $(x, y)$ , где ось  $x$  совпадает с линиями тока начального состояния  $nr^2 = \text{const}$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) (b - \lambda_0^2 \Delta b - \beta_0 b) - g_0 \frac{\partial (b, \lambda_0^2 \Delta b)}{\partial (x, y)} = 0, \quad (3.21)$$

где  $v_0 = \frac{c}{4\pi ne} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} (rB_0)$  — токовая скорость;  $\lambda_0 = c/\omega_{pe}$ ;  $\beta_0 =$   
 $= \frac{1}{nr^2} \frac{\partial}{\partial y} (nr^2) - \frac{v_0}{g_0}$ ;  $g_0 = \frac{cB_0}{4\pi ne}$ .

При выводе коэффициентов  $v_0$ ,  $\beta_0$  учитывались неоднородность плазмы, кривизна силовых линий и члены, возникающие при «выпрямлении» осей координат в выражении лапласиана.

В заключение обсудим причину, по которой в уравнении (3.16), помимо обычного нелинейного члена, приводящего к опрокидыванию волны, сохранен член с вихревой нелинейностью. Причина в том, что мы рассматриваем дрейфовые движения, в которых вещество перемещается в основном в направлении, перпендикулярном волновому вектору, и это перемещение может значительно превышать длину волны. Естественно, что при таких перемещениях нужно учитывать перенос «вмороженного» возмущения. Первоначально уравнения Кортевега — де Фриза и Кадомцева — Петвиашвили выводились для волн с продольным движением вещества, и отбрасывание члена с вихревой нелинейностью было корректным.

### 3.4. Устойчивые вихри и солитоны в неоднородной плазме

Монопольные вихри, устойчивые в однородной плазме, устойчивы и в неоднородной, если поправки на неоднородность малы. Похожая ситуация имеет место и с дипольными вихрями. Помимо вихрей, появляется и солитонное решение, найденное Петвиашвили.

Рассмотрение будем вести на основе полученного в предшествующем параграфе уравнения (3.16)

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -b + \frac{b^2}{2} - r_0^2 \Delta b \right) + \frac{\partial (b, r_0^2 \Delta b)}{\partial (x, y)}. \quad (3.22)$$

Сначала заметим, что  $\partial (b, \Delta b) / \partial (x, y) = 0$  на решениях, зависящих только от радиуса, остальная часть уравнения содержит члены с дисперсией и нелинейностью, типичной для уравнений с солитонными решениями. Отыскивая решения в виде  $b = b(x - (1+v)t, y)$ , приходим к уравнению

$$vb + b^2/2 - r_0^2 \Delta b = 0. \quad (3.23)$$

В центрально-симметричном случае, когда законно отбрасывание якобиана, (3.23) имеет вид

$$vb + \frac{b^2}{2} - r_0^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{db}{dr} = 0. \quad (3.24)$$

Это уравнение численно решено в [25] и имеет монотонно спадающее к нулю на бесконечности солитонное решение. Это решение устойчиво, оно максимизирует энергию (3.18) при фиксированном



импульсе (3.17). Его устойчивость доказана методом Захарова — Кузнецова [27]. Масштаб солитона  $R$  связан с амплитудой соотношением  $b \approx r_0^2 R^2$ . Полученное решение выглядит типично солитонным, однако уверенность в этом может быть поколеблена. Действительно, скорость солитона при принятом обезразмеривании в пренебрежении поправками равна единице, а дрейфовая скорость плазмы  $L \nabla b$ , где  $L$  — характерный масштаб неоднородности. Если дрейфовая скорость много больше скорости перемещения,

$$L r_0^2 / R^3 \gg 1, \quad (3.25)$$

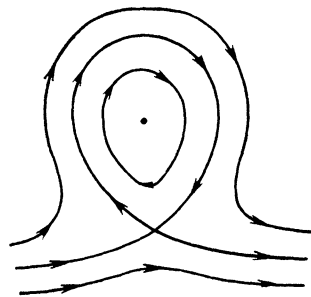


Рис. 5. Линии тока в движущемся вихре

то линии тока в некоторой области замкнуты (рис. 5).

Поскольку уравнение (3.22) законно лишь при условии  $R \ll \sqrt[3]{r_0^2 L}$  (иначе надо учитывать зависимость скорости линейных волн от координат [27]), наше решение всегда содержит захваченную плазму, что свойственно вихрям. Заметим, что в экспериментах с вращающейся жидкостью все образования, претендующие на роль солитонов, захватывали жидкость [29, 30]. Выглядит естественным, что если слегка поменять ротор обобщенного импульса на замкнутых линиях тока, проходящих внутри сепаратрисы (рис. 5), решение не потеряет устойчивости аналогично вихрям в однородной плазме. Поэтому в обзоре [23] высказано мнение, что решение Петвиашвили является лишь центром «острова стабильности», а семейство устойчивых решений является бесконечно-параметрическим. Позднее этим рассуждениям был придан более строгий смысл [26]. Оказалось, что вихри, устойчивые в однородной плазме (§ 3.1), остаются устойчивыми и в неоднородной, если поправки от неоднородности малы.

Большое количество работ посвящено относительно частным решениям, которые, однако, обладают тем, несомненным достоинством, что записаны в аналитическом виде. Все они содержат сшивки, но возникающие при этом разрывы высших производных не являются существенным недостатком. Наиболее известно дипольное решение Ларичева—Резника [31], являющееся обобщением вихревого решения в однородной жидкости [32].

Все упомянутые выше решения содержат замкнутые линии изо-завихренности и переносят вещество, являясь, по существу, вихрями не универсальной формы. Солитонное решение Петвиашвили — единственное, которое не обязательно содержит область захваченного вещества (при  $R \gg \sqrt[3]{r_0^2 L}$  захвата нет), а законность использования уравнения (3.22) при таком неравенстве можно обеспе-

чить подбором параметров, при которых фазовая скорость дрейфовых волн слабо зависит от координаты,  $|\nabla v_{\phi}| \ll v_{\phi}/L$ .

В заключение отметим, что уравнения равновесия вихрей, содержащие произвольную функцию, были получены для электронной гидродинамики еще в работе [32]. Для ионной гидродинамики такое уравнение получено в [33]. Впервые на возможность функционального произвола в таких задачах было указано еще в [34].

### 3.5. Псевдодвумерные вихри

ЭМГ-эффекты существенно зависят от геометрии задачи. По этой причине представляется целесообразным поиск моделей, с одной стороны, описывающих (хотя бы качественно) трехмерные эффекты, а с другой — столь же решаемых аналитически, что и рассмотренные выше двумерные (вырожденные) ситуации. Одной из них может быть течение электронов в помещенном в вакуум тонком плоском слое (листе) плазмы.

Действительно, предположим, что в плоскости  $z=0$  расположен плазменный лист малой толщины  $\delta \rightarrow 0$ , но с конечными «поверхностными» концентрацией  $N = n\delta$ , проводимостью  $\Sigma = \sigma\delta$  и плотностью тока  $\mathbf{J} = \mathbf{j}\delta$ . Уравнение ЭМГ внутри слоя по-прежнему записывается в виде (1.6). Однако в следующем из него двумерном уравнении для вмороженной в  $\mathbf{J}$  (при  $\Sigma = \infty$ )  $z$ -компоненты магнитного поля  $b(B_z(x, y, 0) \equiv b(x, y))$  можно всюду заменить объемные характеристики на поверхностные:

$$\mathbf{e}_z \frac{\partial b}{\partial t} = -\text{rot} \frac{[\mathbf{J}, \mathbf{e}_z] b}{Ne} - \text{rot} \frac{c\mathbf{J}}{\Sigma} \quad (3.26)$$

(вследствие малой толщины листа,  $\delta \ll \delta_{sk}$  или  $\delta \ll c/\omega_{pe}$ , тангенциальные компоненты  $\mathbf{V}$  в поток не вморожены). Единственное условие этого — отсутствие внутри слоя у  $n$ ,  $\sigma$  и  $\mathbf{j}$  градиентов по  $z$  (в противном случае началось бы взаимное превращение потенциальных и нормальных компонент  $\mathbf{V}$ ).

Вся же информация о скрытой трехмерности задачи содержится в соотношении между  $b$  и  $\mathbf{J}$  (закон Био и Савара):

$$b\mathbf{e}_z = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2\mathbf{r}' \quad (3.27)$$

(интеграл здесь в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  берется в смысле главного значения). Нам в действительности потребуется обращение формулы (3.27), легко проводимое с помощью преобразования Фурье:

$$\mathbf{J} = -\frac{c}{4\pi^2} \int \frac{b(\mathbf{r}') [\mathbf{e}_z, \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2\mathbf{r}' = \frac{c}{4\pi^2} \text{rot} \int \frac{b(\mathbf{r}') \mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2\mathbf{r}'. \quad (3.28)$$

Таким образом, трехмерность задачи проявляется в нелокальности связи между  $b$  и  $\mathbf{J}$ .

Рассмотрим сначала случай струйного течения электронов:

$J = J(x) e_y$ ,  $b = b(x)$ . Он описывается уравнением

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{N} \frac{Jb}{e} - \frac{c}{\Sigma} \frac{\partial J}{\partial x}, \quad (3.29)$$

$a$  и  $2\pi J/c$  связаны преобразованием Гильберта

$$b(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{2\pi J(x')}{c(x' - x)} dx', \quad \frac{2\pi J(x)}{c} = -\frac{1}{\pi} \int \frac{b(x')}{x' - x} dx' \quad (3.30)$$

(интегралы берутся в смысле главного значения). В качестве примера такой связи можно привести используемые ниже функции  $(1+x^2/a^2)^{-1}$  и  $x/a(1+x^2/a^2)^{-1}$  или  $\cos(x/a)$  и  $\sin(x/a)$ .

Уравнения (3.29), (3.30) соответствуют (2.4), описывающему обычную плоскую ситуацию, но нелокальность нелинейности и диссипации вносит новые эффекты, изменяя иерархию соответствующих членов в уравнении. Так, с одной стороны, такая нелинейность обладает самостабилизирующими дисперсионными свойствами, что видно уже из следующего частного солитоноподобного решения (3.29) (при  $\Sigma = \infty$ ):

$$b = \frac{G}{1 + (x - paGt)^2/a^2}, \quad p = \frac{c}{2\pi e} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{N}$$

(здесь и далее мы пренебрегаем зависимостью  $p(y)$ , что справедливо при  $\partial/\partial y \ll \partial/\partial y$  и заведомо верно при  $N \propto (y - y_0)^{-1}$ ), а с другой, если уже нелинейность вызывает укрупнение профиля, то этот процесс не останавливается и диссипацией. Примером может служить взрывная контракция тока (столкновение солитонов)

$$J = \frac{c}{2\pi} G \frac{1 + t(v + pG)}{x^2/a^2 + [1 + t(v + pG)]^2}; \quad v = \frac{c^2}{2\pi\Sigma}$$

при  $G < -v/p$  [ср. контракцию в рамках (2.4) в § 4.2]. Замечательным свойством (3.29) является то, что, несмотря на свой интегродифференциальный вид, оно, как и уравнение Бюргера (2.4), допускает точное аналитическое решение, хотя и с помощью совершенно отличного приема — выхода в комплексную плоскость и рассмотрения  $x$  как комплексной величины. Действительно, согласно (3.30)  $b$  и  $2\pi J/c$  связаны между собой аналогично действительной и мнимой частям обобщенной восприимчивости (соотношения Крамерса—Кронига), что позволяет ввести аналитичную в верхней полуплоскости  $x$  функцию  $\omega = b + i \cdot 2\pi J/c$ . Уравнение (3.29) и парное к нему уравнение для  $J$ , получающееся из (3.29) с помощью преобразования Гильберта, объединяются в одно уравнение для  $\omega$

$$i \frac{\partial \omega}{\partial t} = p\omega^2 - v \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (3.31)$$

которое тривиальным образом интегрируется по характеристикам.

Пусть теперь  $N = \text{const}$  и  $\Sigma = \infty$ , но течение электронов по плоскости произвольно, т. е. носит, вообще говоря, вихревой характер. В полностью однородной вдоль  $z$  задаче в этом случае уравнение,

аналогичное (3.26), вырождается в тождество  $\partial B_z / \partial t = 0$  [см. (3.2)], и только учет инерции электронов приводит к нетривиальной эволюции течения. В рассматриваемой геометрии вследствие другой связи между несжимаемым потоком  $\mathbf{J}$  и замороженной в него величиной  $b$  это не так:  $(\mathbf{J}\nabla)b \equiv 0$ , и стационарными оказываются лишь течения, удовлетворяющие условию [ср. (3.2)]

$$\partial \left( \int \frac{b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2\mathbf{r}', b \right) / \partial(x, y) = 0,$$

чему, в частности, по-прежнему соответствуют круглые вихри. Еще одним характерным отличием (помимо нетривиальной эволюции в безмассовом приближении) псевдодвумерных вихрей является их нелокальность — магнитное поле от ограниченного по  $r$  тока  $\mathbf{J}_\varphi$ , проникая через вакуум, спадает на бесконечности всего лишь степенным образом даже при  $m \rightarrow 0$ . Учет инерции электронов приводит к замороженности в  $\mathbf{J}$  величины  $\omega = b + \frac{mc}{Ne^2} \mathbf{e}_z \text{rot } \mathbf{J}$ . Интегралы движения таких вихрей совершенно аналогичны (3.4) — (3.7), лишь потенциал взаимодействия «зарядов» в (3.7) переходит в  $\mathbf{H}_0(r) - N_0(r)$ , где  $\mathbf{H}_0$  — функция Струве, а  $N_0$  — функция Неймана, т. е. ведет себя как  $-\ln r$  при  $r \ll 1$  и как  $1/r$  при  $r \gg 1$  (единицей измерения  $r$  здесь служит не  $c/\omega_{pe}$ , а  $c^2/\Omega_{pe}^2$ , где  $\Omega_{pe}^2 = 4\pi Ne^2/m$ ), т. е. выводы об устойчивости определенных классов вихрей сохраняются. Если характерный размер течения  $a \ll 1$ , то связь между потоком  $\mathbf{J}$  и замороженной в него величиной  $\text{rot } \mathbf{J}$  вырождается в локальную, система перестает «чувствовать» свою ограниченность по  $z$ , и ситуация сводится к разобранным в § 3.2 двумерному течению идеальной жидкости.

## 4. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ЭМГ-СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 4.1. Трехмерные устойчивые вихри и трехмерная турбулентность

Рассмотрим модель турбулентности, в которой дробление масштабов происходит лишь в некоторых относительно малых областях — подобно явлению пересоединения в обычной МГД. Одновременно существуют устойчивые конфигурации с тороидальными магнитными поверхностями.

В случае предельно идеализированной модели плотность ионов можно считать постоянной, а движением ионов и электронной инерцией пренебречь. Тогда уравнение эволюции магнитного поля, обезразмеренное так, что  $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{B}$ , выглядит следующим образом:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{rot} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]. \quad (4.1)$$

Это уравнение сохраняет энергию

$$\mathcal{E} = (1/2) \int B^2 d^3\mathbf{r} \quad (4.2)$$

и может быть записано в гамильтоновом виде [14]. Оно чрезвычайно близко к уравнению движения невязкой несжимаемой жидкости, но по свойствам своим все же ему не тождественно. Первым отличительным свойством является существование устойчивых локализованных решений уравнения (4.1), минимизирующих энергию при условии вмороженности [23, 35]. Последнее означает, что вариация имеет вид

$$\delta \mathbf{B} = \text{rot} [\text{rot } \mathbf{q}, \mathbf{B}_0], \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{q}$  — произвольный малый вектор. Покажем, что минимум энергии (4.2) достигается на стационарных решениях. Из условия  $\int \mathbf{B}_0 \delta \mathbf{B} d^3 r = 0$  с учетом выражения (4.3) следует

$$0 = \int \mathbf{B}_0 \text{rot} [\text{rot } \mathbf{q}, \mathbf{B}_0] d^3 r = \int \mathbf{q} \text{rot} [\text{rot } \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_0] d^3 r,$$

что в силу произвольности  $\mathbf{q}$  означает

$$\text{rot} [\text{rot } \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_0] = 0, \quad (4.4)$$

т. е. доказывает наше утверждение. Если силовые линии зацеплены, то вариации вида (4.3) не могут обратить (4.2) в нуль, а значит, казалось бы, существует нетривиальный минимум энергии поля при заданных вмороженных потоках. Рассмотрим, например, исходное поле, каждая силовая линия которого представляет собой кольцо, причем любые две силовые линии зацеплены  $N$  раз. При минимизации энергии возникнет устойчивая в рамках уравнения (4.1) конфигурация с силовыми линиями, целочисленно наматывающимися на тороидальные поверхности.

К сожалению, такого рода рассуждения не универсальны. Как было впервые отмечено, по-видимому, Арнольдом [36], в общем случае силовые линии плотно заполняют трехмерные области и при минимизации энергии не могут быть уложены на поверхности, как того требует уравнение (4.4). В реально рассматриваемых физических задачах, однако, топология поля обычно достаточно проста, чтобы избежать подобных затруднений.

Обсудим возможную динамику турбулентности в рамках (4.1). Полагаем, как обычно, что на малых масштабах включается диссипация, не влияющая на ход крупномасштабных процессов. Зададимся начальной конфигурацией  $\mathbf{B}(r)$  общего вида, предоставив ей возможность эволюционировать согласно (4.1). Очевидно, избыток энергии тут же начнет сбрасываться в изгибные колебания силовых линий [в случае квазиклассической линеаризации (4.1) это обычные геликоны]. Однако к состоянию с минимальной энергией можно прийти, вообще говоря, лишь с модификацией топологии, т. е. включив перезамыкание (как в обычной МГД [37]). В итоге должны получиться устойчивые конфигурации с тороидальными — в общем случае иррациональными — обмотками. Избыток энергии при перезамыкании частично диссипируется, а частично перекачивается в геликоны и далее — в малые пространственные масштабы через трехволновые взаимодействия на геликонной ветви.

Совершенно иная модель построена в [38] по образцам идеальной жидкости. В этой модели частота дробления масштаба  $v_\lambda \propto B_\lambda / \lambda^2$ , а из постоянства потока энергии по масштабам вытекает  $B_\lambda \propto \lambda^{2/3}$ . Отсюда следует, что при достаточности малых пространственных масштабах частота  $v_\lambda \propto \lambda^{-4/3}$  много меньше частоты геликона  $\Omega_h \propto B_0 / \lambda^2$ , что противоречит сделанным предположениям: турбулентность является слабой, а не сильной. Если к тому же вспомнить, что в рамках уравнения (4.1) существуют стационарные устойчивые конфигурации на масштабах много больше масштаба диссипации, то в целом возможность реализации модели [38] выглядит весьма проблематичной.

## 4.2. ЭМГ-сопротивление

Понятие ЭМГ-сопротивления чрезвычайно важно для целого ряда практических задач. Единые методы вычисления его пока неизвестны.

Прежде всего остановимся на необходимости и полезности введения нового термина. Хорошо известно, что развитию сопротивления потоку частиц на микроскопическом уровне соответствует рассеяние отдельных частиц на неких объектах (других частицах или волнах), при котором первые теряют импульс и энергию направленного движения. Вообще говоря, как уже неоднократно упоминалось выше, в рамках ЭМГ энергия и импульс потока электронов содержат как механическую, так и полевую составляющие:

$$\mathcal{E} = \frac{nmu^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi}; \quad \pi = nmu - \frac{ne}{c} A. \quad (4.5)$$

Однако исследуемые обычно механизмы рассеяния электронов (например, кулоновские столкновения с ионами [1] или квазилинейное взаимодействие с ионно-звуковыми шумами [4, 39, 40]) приводят к изменению в каждом акте лишь первых слагаемых в (4.5), не затрагивая вторых. Причина такого ограничения достаточно проста: вследствие малости рассеивающих объектов с каждым из них взаимодействуют лишь отдельные частицы, тогда как полевые составляющие импульса и энергии одного электрона зависят от движения всех электронов в целом — магнитное поле является интегральной характеристикой тока.

Следовательно, для изменения  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  в (4.5) необходимо наличие существенно макроскопических препятствий электронному потоку, на каждом из которых рассеивается одновременно много частиц. Нетрудно видеть, что характерный размер препятствия  $a$  должен удовлетворять неравенству  $a > c/\omega_{pe}$ . В этом случае вследствие доминирования в (4.5) полевых составляющих над механическими электронный ток будет испытывать очень большое сопротивление — ЭМГ-сопротивление.

Рассмотрим его на простом примере. Стационарное протекание тока в идеально проводящей плазме описывается в рамках безмас-

совой ЭМГ уравнением

$$\text{rot} [j/n, \mathbf{V}] = 0. \quad (4.6)$$

В двумерных вырожденных ситуациях, когда  $j \perp \mathbf{V}$  и  $(\mathbf{V}, \nabla)n, V \equiv 0$ , оно, вообще говоря, соответствует течению электронов вдоль линий уровня некоторой функции  $F(\zeta, \eta)$ , где  $(\zeta, \eta)$  — координаты на поверхностях, перпендикулярных  $\mathbf{V}$ . Например,  $F = nr^2$  в случае  $\mathbf{V} \parallel \mathbf{e}_\varphi$  и  $F = n$  в случае  $\mathbf{V} \parallel \mathbf{e}_z$ . [Мы уже встречались с этим свойством ЭМГ — и даже в более общем случае  $m \neq 0$  — в предыдущей главе: см. якобианы в (3.2), (3.15).] Поэтому роль упомянутых выше макроскопических препятствий могут играть резкие изменения  $F$  (например, вследствие неоднородности плазмы): встречая такие преграды на своем пути, линии тока в рамках (4.6) не могут их преодолеть.

Учет конечности  $\sigma$  меняет ситуацию, и она начинает зависеть от вида препятствия. Если последнее абсолютно непроницаемо (граница с вакуумом), то линии  $j$  вблизи препятствия искривляются и ток начинает растекаться вдоль него [7]. На поверхности препятствия образуется «пограничный слой» толщиной  $\delta \sim a/(\omega_{pe}\tau_e) \ll a$ . В нем происходит диссипация энергии, равная (в цилиндрической геометрии с  $\mathbf{V} \parallel \mathbf{e}_\varphi$ )  $Q = \frac{j^2}{\sigma} v_{\text{слоя}} \approx \left(\frac{cB}{4\pi\sigma}\right)^2 \frac{\delta a^2}{\sigma} \sim$

$\sim \frac{B^2}{8\pi} u a^2$ , где  $u \sim cB/(nea)$  — токовая скорость вдали от пограничного слоя, т. е. диссипирует вся сносимая током магнитная энергия, попадающая на препятствие. (Для простоты в оценках все геометрические факторы считались порядка единицы). Значение  $Q$  совершенно не зависит от  $\sigma$  и определяется чисто гидродинамическими характеристиками течения, и именно поэтому рассматриваемое явление заслуживает названия ЭМГ-сопротивления. Более того,  $Q$  остается неизменной и при  $\sigma \rightarrow \infty$ , когда на первый план выходит инерция электронов [11]. При этом  $\delta \sim c/\omega_{pe}$  и энергия потока перекачивается не в тепло, а в рождаемые препятствием вихри, дальнейшая самостоятельная жизнь которых описана в гл. 3. Это обстоятельство позволяет определить ЭМГ-сопротивление как  $R = Q/I^2$ . Для данного примера ( $I \sim cBa^2 \sim neua^2$ )  $R \sim u/c^2$  или  $30 u/c$  Ом. Аналогичный эффект может иметь место и в других случаях. Например, при инжекции электронного пучка в плазму вследствие запираания его магнитного поля вблизи границы [см. (2.15)] плазменный ток, растекаясь по этой границе, испытывает то же сопротивление:  $R \sim u/c^2 = (u_b/c^2) n_b/n$ . Если же это препятствие является всего лишь флуктуацией плотности плазмы, ток может протечь и сквозь него, но с существенным изменением своих характеристик. Рассмотрим этот эффект на примере плоской геометрии [уравнение (2.3)], т. е. с  $\mathbf{V} \parallel \mathbf{e}_z$ . Пусть  $j = j(x) \mathbf{e}_y$  и  $\frac{\partial}{\partial y} n \neq 0$ .

Тогда в плазме с монотонным профилем  $n(y)$  ( $\frac{\partial}{\partial y} \ll \frac{\partial}{\partial x}$ ) элект-

ронный ток, вызываемый движением электронов в сторону повышения концентрации, контрагирует [ср. с (2.7)]

$$B = -B_0 \operatorname{th} \frac{\rho \sigma B_0}{2} x, \quad p = \frac{1}{ec} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n} > 0$$

и испытывает сопротивление, лишь геометрическими факторами отличающееся от разобранный выше. При противоположном направлении тока  $x = \pm L$  [ср. с (2.5)]:

$$\frac{B}{B_0} = G \operatorname{tg} \frac{\rho \sigma B_0}{2} Gx,$$

где константа  $G$  определяется из условия  $B(\pm L) = \pm B_0$ , т. е. в стационарном режиме ток течет главным образом вдоль границ и испытывает то же (по порядку) сопротивление.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что каждое отдельное препятствие электронному току как бы формирует «ударную» волну ЭМГ (диссипативную или бесстолкновительную), внутри которой и происходит отбор энергии у магнитного поля, не зависящий от конкретного механизма. В случае множественности таких препятствий [немонотонности  $n(y)$ ] можно воспользоваться усреднением по пространству и исследовать до конца даже нестационарную задачу в рамках все того же уравнения (2.3). Действительно, пусть  $n = n_0 / (1 + \alpha \cos(ky))$ , а средний по пространству ток по-прежнему  $\langle j \rangle \parallel e_y$ . Тогда записав  $B_z$  как  $B(x, t) + \tilde{B}(x, t) \sin(ky)$  ( $\tilde{B} \ll B$ ,  $\partial/\partial x \ll k$ ), можно получить следующие соотношения для  $B$  и  $\tilde{B}$ :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{B} &= \frac{\alpha \sigma}{2n_0 ec} \frac{\partial}{\partial x} B^2; \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{c^2}{4\pi \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha \sigma B}{n_0 ec} \right)^2 + 1 \right] \frac{\partial B}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

справедливые при  $c^2 k^2 / (4\pi \sigma) \gg 1/t$ . Видно, что протекание тока «напролом» через препятствия приводит к повышению сопротивления (и скорости диффузии магнитного поля) в  $(\omega_{Be} \tau_e)^2$  раз.

Разберем теперь более адекватную реальности задачу о сопротивлении, испытываемом электронами при течении поперек  $\mathbf{B}$  через неоднородную плазму, желобковые (сильно вытянутые вдоль поля) возмущения  $n$  которой создают макроскопические флуктуации  $F$ . Собственно, половина этой задачи уже решена: если не существует линий уровня  $F$ , соединяющих электроды (рассматриваемые здесь только как источник и сток электронов, а отнюдь не как эквипотенциали), то ситуация описывается лишь слегка модифицированной системой (4.7). Однако наличие подобных линий может в корне изменить положение — ведь сопротивление на таком пути куда меньше, чем на других.



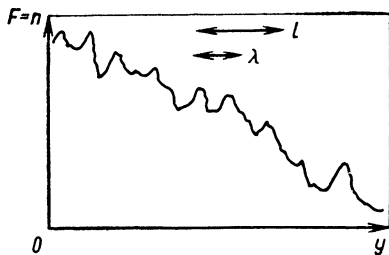


Рис. 6. Материковый склон страны  $F$

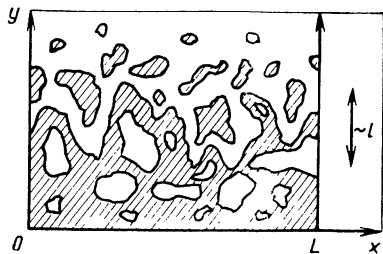


Рис. 7. Береговая линия на материковом склоне

Видно, что эта задача об ЭМГ-сопротивлении близка к известным «задаче о протекании» и «задаче о потоке» [41]. В частности, при ее исследовании может быть полезной аналогия с затоплением горной страны  $F$  водой: поведение линий уровня может быть прослежено при изучении слияния отдельных «озер» и появления «береговых линий», соединяющих электроды. Далее для определенности будем по-прежнему рассматривать плоский случай с  $F=n(x, y)$  и электродами, расположенными при  $x=0, L$ .

Пусть  $n=n_0(y)+\delta n(x, y)$ , где  $n_0$  — некоторая монотонная функция, а  $\delta n$  — случайная, с характерными пространственными масштабами  $l$  и  $\lambda$  соответственно, причем  $l \gg \lambda$ . Введение этих масштабов не совсем стандартно: имеется в виду, что при изменении аргумента  $n_0$  на  $l$ , а  $\delta n$  на  $\lambda$  обе функции изменяются на одно и то же значение. Если  $l \neq \infty$ , т. е.  $\nabla n_0 \neq 0$  (в цилиндрической геометрии с  $F=nr^2$  этому соответствует и  $n_0=\text{const}$ ), то путей, соединяющих электроды, много: страна  $F$  в этом случае расположена на материковом склоне (рис. 6), и при любом уровне ее затопления существует береговая линия, соединяющая  $x=0$  и  $x=L$ . Вклад их в проводимость определяется средней длиной  $(l/\lambda)^\alpha L$  — линейность по  $L$  связана с тем, что при  $L \gg l$  береговая линия на склоне «гуляет» по  $y$  не более чем на  $l$  (рис. 7) — и их шириной  $S(\lambda/l)^\beta$ , где  $S$  — размер электродов по  $y$  (рис. 8). Поскольку площадь таких путей в плоскости  $Oxy$ , естественно, не превышает полную площадь плазмы, то  $\alpha \leq \beta$ , причем для случая, изображенного на рис. 8, неравенство является строгим. К сожалению, из двух характеристических индексов  $\alpha$  и  $\beta$  удастся определить лишь один. Введем в рассмотрение бездивергентный поток с плотностью  $\mathbf{q} = -[\mathbf{e}_z, \nabla n]$ , движущийся вдоль линий уровня. Он вытекает из катода и втекает в анод в количестве, равном

$$J = - \int_{y_1}^{y_2} \mathbf{e}_x [\mathbf{e}_z, \nabla n] dy = n_0(y_2) - n_0(y_1) \sim (y_2 - y_1)/l,$$

согласно определению  $l$  ( $y_2 - y_1 \gg l$ ). С другой стороны, в объеме между электродами характерное значение  $q \sim 1/\lambda$ , следовательно,

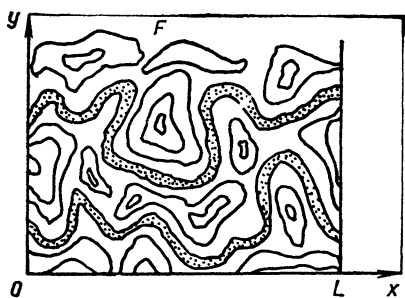


Рис. 8. Линии  $F = \text{const}$ , соединяющие электроды

$J$  переносится через площадь  $(y_2 - y_1)^2/l$ , т. е.  $\beta = 1$  [42]. Если же  $l = \infty$ , т. е.  $n_0 = \text{const}$ , то линии уровня в основном замкнуты. Тем не менее связь катода с анодом все же существует даже при сколь угодно большом  $L$  — она соответствует береговой линии в

момент затопления половины страны  $F$ , когда пути, соединяющие электроды по суше, исчезают, а по воде появляются [41].

Длина соединяющих путей в этом случае порядка  $L(L/\lambda)^{\nu}$ , а ширина стремится к 0 при  $L \rightarrow \infty$ . Это значит, что сопротивление здесь намного больше, чем в предыдущем случае.

Итак, введенное понятие об ЭМГ-сопротивлении позволяет выявить многие нетривиальные эффекты уже в рамках простейшего уравнения (4.6) и его нестационарного аналога (2.3). К сожалению, пределы применимости такого описания не выяснены. Например, учет медленного движения ионов может, во-первых, сделать необходимым самосогласованное определение спектра  $\delta n$  по  $\lambda$  (а влияние спектра флуктуаций плотности на сопротивление может быть довольно большим — это видно из простого примера с  $\frac{\partial}{\partial y} \delta n = 0$ , когда  $\alpha = \beta$ ), а во-вторых, ввести в задачу дополни-

тельную диссипацию, возникающую за счет «прокидывания» поля в рамках (2.3) при медленном «шевелении»  $n$ . Очень интересен также вопрос о принципиальном существовании ЭМГ-сопротивления в невырожденной трехмерной геометрии: ведь в этом случае два обязательных условия — квазинейтральность и вмороженность  $\mathbf{V}$  — не столь сильно ограничивают движение электронов, так как число степеней свободы на единицу больше. Например, если в рассмотренной задаче допустить ограниченные вдоль  $\mathbf{V}$  возмущения плотности ( $(\mathbf{V}\nabla)n \neq 0$ ), то электроны получат возможность протекать сквозь них, растекаясь одновременно вдоль  $\mathbf{V}$ . При этом, однако, продольный ток не может свернуть в сторону, и у каждого маленького препятствия возникают длинные токовые «усы». Такое течение может начать излучать геликоны, и тогда разовьется какой-то другой механизм ЭМГ-сопротивления — во всяком случае, ситуация требует дополнительного исследования.

Таким образом, вопрос об ЭМГ-сопротивлении нуждается в глубоком и детальном изучении, заключающемся, может быть, не столько в решении модельных задач, сколько в создании своеобразной «системы ценностей», позволяющей делать простейшие оценки, и аналогичной системе, развитой для аномального сопротивления вследствие ионно-звуковой неустойчивости [4, 39, 40].

## 5. z-ПИНЧ

### 5.1. ЭМГ-эффекты в z-пинче

ЭМГ-описание может быть с успехом применено к такому популярному плазменному объекту, как z-пинч. При этом выявляется ряд нетривиальных эффектов.

Условие применимости ЭМГ  $a < c/\omega_{pi}$  для z-пинча ( $a \sim r$ ) принято записывать в терминах погонного числа ионов [4]:

$$\Pi_i \equiv ZNe^2/(AMc^2) < 1; \quad N = \int_0^{\infty} n \cdot 2\pi r dr. \quad (5.1)$$

Для целого ряда экспериментов с короткоимпульсными сильноточными разрядами (сильноточными диодами [43], плазменным фокусом [44], вакуумной искрой [45] и др.) неравенство (5.1) достаточно типично. Это значит, что для них в игру могут вступить различные ЭМГ-эффекты, описанные выше (в частности, конвективный снос поля электронным током), способные существенно изменить динамику z-пинча, следующую из одножидкостного рассмотрения.

Ситуация, однако, отнюдь не тривиальна, и одно условие (5.1) не гарантирует существенности (и даже существования) этих эффектов. Действительно, в случае чрезвычайно характерного для z-пинча равновесия Беннета [4]  $[j, B]$  полностью компенсируется давлением плазмы. Если давление ионов мало ( $P_i \ll P_e$ ), то эта компенсация проявляется и в электронном уравнении, т. е. конвективные ЭМГ-эффекты отсутствуют. При малых отклонениях от беннетовского равновесия эти эффекты все же имеют место, но вследствие их сильной подавленности движением ионов пренебрегать нельзя, и определяющими являются кооперативные электрон-ионные эффекты. Описание ярких примеров таких эффектов (например, возникновения неустойчивости типа перетяжки вследствие пересечения геликонной и альфвеновской мод) можно найти в [4, 46].

Сильной компенсации конвективного члена в уравнении для магнитного поля не происходит, если  $P_i > P_e$  либо если истинное равновесие отсутствует и магнитная сила компенсируется инерцией ионов — и именно такая ситуация рассматривается в § 5.1. Однако и в этом случае электронное давление вносит свой вклад в динамику поля.

Существенным для динамики z-пинча может оказаться и джоулев нагрев плазмы, особенно если учесть, что в равновесном пинче  $c_s \simeq v_A$  и условие (5.1) означает превышение токовой скорости и над  $c_s$ , т. е. прохождение порога ионно-звуковой неустойчивости тока. Развивающееся вследствие этого аномальное сопротивление плазмы [4, 39, 40] значительно увеличивает роль резистивных эффектов [47, 48]. Критерием их существенности является превышение диссипативного нагрева плазмы  $\Delta T$  над начальной ее темпе-

ратурой  $T$ :

$$T < \Delta T \approx \frac{mj^2}{ne^2} v_{ef} \frac{L}{u}, \quad j \sim \frac{cB}{R}$$

( $L$  — длина пинча,  $R$  — его радиус,  $u$  — токовая скорость). Критерий можно переписать в виде [11]

$$v_{ef} > \omega_{pe} \frac{R}{L} \sqrt{\frac{T}{mc^2}} \sqrt{\frac{8\pi nT}{B^2}}. \quad (5.2)$$

При выполнении (5.2) импеданс сильноточного  $z$ -пинча (например, плазменного диода) может определяться омическими, а не гидродинамическими эффектами. Описанию этой ситуации посвящен § 5.3. К сожалению, к настоящему времени оба эффекта (конвективный снос поля и джоулев нагрев плазмы) рассмотрены лишь по отдельности и в рамках идеализированных моделей.

## 5.2. Электронные течения в пинче малой плотности

Конвективный снос поля током приводит к стабилизации перетяжки  $z$ -пинча.

Впервые эффекты, связанные с конвективным переносом поля в геометрии, моделирующей перетяжку  $z$ -пинча, рассмотрены в [6, 7]. В дальнейшем, однако, обычно они не принимались во внимание вплоть до [11] (если не считать кинетической модели [49, 50], где они автоматически включались в рассмотрение, но не были выделены в чистом виде).

Проще всего учесть сносный эффект в приближении идеальной вмороженности поля в электроны ( $P_e \rightarrow 0$ ,  $v_{ef} \rightarrow 0$ ,  $a \gg c/\omega_{pe}$ ). Для аксиально-симметричных систем в этом случае уравнение для магнитного поля [см. (2.1), (2.8)] удобно переписать в терминах функции тока  $I \equiv (cB/2)r$  ( $\mathbf{B} \parallel e_\varphi$ ):

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{e_\varphi r}{4\pi e} \left[ \nabla I^2, \nabla \frac{1}{nr^2} \right] = 0 \quad (5.3)$$

[ср. с (2.3), (2.8)]. В стационарном режиме ( $\partial/\partial t \equiv 0$ ) отсюда следует неоднократно упоминавшийся выше эффект протекания тока вдоль линий  $nr^2 = \text{const}$ :  $I = I(nr^2)$ . Уже из этого соотношения следует нетривиальный эффект фокусировки электронного тока в сильноточном диоде при его втекании в плотную плазму анодной фольги. Для полноты картины необходимо учесть процессы, препятствующие фокусировке. Наиболее естественным из них в данной задаче оказывается конечное электронное давление. Совместная динамика электронов и магнитного поля в этом случае описывается уравнением ( $\partial/\partial t \equiv 0$ )

$$\mathbf{E} - \left[ \frac{\mathbf{j}}{nec}, \mathbf{B} \right] + \frac{\nabla P}{ne} = 0, \quad (5.4)$$

где  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ;  $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}$ .

Будем для простоты считать зависимость  $I(r)$  монотонной, а давление (или температуру) изменяющимся вдоль линий тока по адиабате:

$$\frac{j}{ne} \nabla P - \gamma P \frac{j}{ne} \nabla \ln n = 0,$$

т. е.  $T = T_0(I) (n/n_0)^{\gamma-1}$ . Плотность плазмы будем считать заданной функцией  $n = n(z)$  (динамику ионов пренебрегаем). Беря ротор от обобщенного закона Ома и производя замену  $z \rightarrow n(z)$ , вместо (5.3) получаем

$$2n \frac{\partial I^2}{\partial n} - \frac{\partial I^2}{\partial r} \left[ r + 2\pi c^2 \frac{dT_0}{dI^2} r^3 \left( \frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-1} n \right] = 0. \quad (5.5)$$

Характеристиками этого уравнения являются линии [11]

$$\frac{r(I)}{r_0} = \left( \frac{n}{n_0} \right)^{-1/2} \left[ C(I) - A(I) \left( \frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-1} \right]^{-1/2}. \quad (5.6)$$

Здесь  $A(I) = -\frac{2\pi}{\gamma-1} c^2 r_0^2 n_0 \frac{dT}{dI^2}$ ,  $C(I)$  определяется из граничных условий. Видно, что с ростом  $n(z)$  линии тока вначале прижимаются к оси по закону  $r \propto n^{-1/2}$ , а затем, если  $A > 0$ , быстро отходят от нее и при  $n/n_0 = (C/A)^{1/(\gamma-1)}$  уходят на бесконечность. В области максимального сжатия давление электронов порядка магнитного давления.

Попытаемся, исходя из исследованных эффектов, рассмотреть перетяжку  $z$ -пинча. При ее развитии магнитное давление превышает давление плазмы, и, следовательно, для предварительных оценок можно пользоваться моделью идеальной вмороженности поля в электроны, в которой ток течет вдоль линий  $nr^2 = \text{const}$ . Достаточно естественным выглядит предположение о том, что в области шейки  $nr^2$  как функция  $z$  проходит через минимум. Пусть граница шейки по радиусу является диффузной. Тогда в стационарном решении линии тока в области  $\frac{\partial}{\partial r} (nr^2) > 0$  отходят от оси, и, если при  $r \rightarrow \infty$   $n(r)$  спадает быстрее, чем  $r^{-2}$ , часть их, проходя через линию  $\frac{\partial}{\partial r} (nr^2) = 0$ , поворачивает назад, так что полный ток через пинч меньше, чем без перетяжки (рис. 9). Если  $n(r)$  спадает медленнее, то полный ток не уменьшается, но отход линий тока приводит к падению магнитного давления. Учет электронного давления в рамках (5.5) приводит к еще более быстрому уходу линий тока из шейки, т. е. в рамках ЭМГ перетяжка не захватывает ток.

Если, наконец, рассмотреть формально резкую границу шейки, на которой плотность скачком падает до нуля, то линии тока, упираясь в эту границу, согласно гл. 4 образуют вдоль нее погранич-

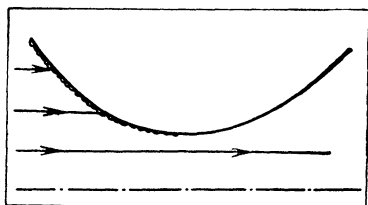
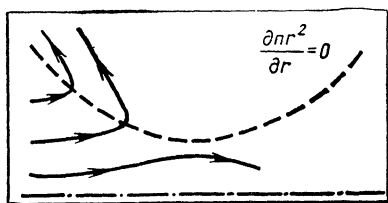


Рис. 9. Линии тока в перетяжке z-пинча с диффузной границей

Рис. 10. Линии тока в перетяжке z-пинча с резкой границей

ный слой с ЭМГ-сопротивлением и сильной диссипацией магнитной энергии (рис. 10). В конечном счете изложенное выше позволяет полагать, что эффекты, связанные с ЭМГ, приводят к стабилизации перетяжки при  $\Pi_i \sim 1$ .

Вырожденность аксиально-симметричной геометрии z-пинча должна способствовать образованию разрывов. Действительно, (5.3) есть не что иное, как уравнение простой волны. После опрокидывания профиля I возникают две возможности. Начинает проявляться либо диссипация — и тогда возникает стационарная бегущая волна с крутым фронтом (см. гл. 2), либо инерция электронов — и тогда волна начинает разваливаться на отдельные вихри (см. гл. 3). В последнем случае энергия магнитного поля переходит в кинетическую энергию электронов.

### 5.3. Резистивный пинч

Учет движения ионов оказывает существенное влияние на ЭМГ-характеристики и импеданс резистивного пинча.

Задача об электронном течении в резистивном пинче с электродами или, что то же, в сильноточном резистивном диоде рассмотрена в [51] в приближении плоской  $(x, y)$  геометрии. Аномальное сопротивление вследствие ионно-звуковой неустойчивости тока было смоделировано зависимостью  $\sigma = \frac{\omega_{pe}}{4\pi} \frac{nev_{Te}}{j}$ . Электроны считались безынерционными; предполагался квазистационарный режим работы диода, поскольку обычно время импульса тока превышает не только электронное, но и ионное пролетное время — последнее обстоятельство сделало необходимым учет движения ионов, т. е. потребовало перехода от ЭМГ к двухкомпонентной гидродинамике. Течение электронов полагалось замагниченным ( $\omega_{Be}\tau_e \gg 1$ ), что давало основание пренебречь термосилой и электронной теплопроводностью. Таким образом, решалась следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{nAM}{Z} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} + P \right), \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_i, \quad P \equiv P_e; \\
 \operatorname{div} (n\mathbf{v}) &= 0; \\
 \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{ne} \nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} + P \right); \\
 u\nabla P - \gamma P u \nabla \ln n &= (\gamma - 1) j^2 / \sigma; \\
 \mathbf{j} &= -neu = (c/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{B}; \\
 \mathbf{E} &= -\nabla\varphi.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

В принципе, и при  $\omega_{Be}\tau_e \gg 1$  в систему (5.7) могут дать существенный вклад термосила и электронные потоки тепла (см. [1]), хотя роль их при аномальном характере проводимости не очевидна [52]. Решение было получено и для этого случая, а также и для довольно общего вида проводимости  $\sigma = f(B, P) n^\alpha j^\beta$ .

При этом геометрия электродов, вообще говоря, произвольна — заданы только их потенциалы. В столь общей постановке удастся достаточно далеко продвинуться в решении задачи за счет ее плоской геометрии, а именно переходом к ортогональным криволинейным координатам ( $\varphi, B$ ). Общее решение выглядит все же весьма громоздко и выражается только в квадратурах, поэтому не будем приводить его здесь, отсылая читателя за подробностями к работам [51], а укажем лишь некоторые наиболее интересные свойства:

а) из естественного предположения о параллельности  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{i}$  вблизи электродов в общем случае с необходимостью следует, что  $\mathbf{v} \equiv 0$  во всем объеме, т. е. плазма в диоде находится в беннетовском равновесии, а сама система (5.7) вырождается в систему уравнений ЭМГ с компенсированным конвективным членом;

б) отношение продольного и поперечного масштабов пинча  $L_{\parallel}/L_{\perp} \sim \omega_{Be}\tau_e \gg 1$ , т. е. при замагниченности течения электронов межэлектродный зазор существенно превышает толщину плазменного облака [ср. с (5.2)];

в) вычислен импеданс плазменных диодов для нескольких случаев достаточно простой геометрии и указан способ вычисления в общем случае (по крайней мере в неявном виде  $F(U, I) = 0$ ), но главное — доказано существование стационарного решения задачи о резистивном пинче с учетом электродов в приближении многокомпонентной гидродинамики.

## 6. ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Замечательное свойство замороженности магнитного поля в электроны, столь обескураживающее анализ динамики поля в плазме, исчезает с повышением давления последней. Положение поправляет выделение из горячей электронной жидкости холодной компонен-

ты — «хранителя вмерозенности». Этот прием позволяет также качественно учесть кинетические эффекты.

Генерация поля коротко может быть определена как увеличение магнитной энергии плазмы за счет внутреннего источника самой среды. В классической постановке задачи считается, что энергоемкость источника значительно превышает энергию магнитного поля, т. е. «грубые» запреты на увеличение  $B^2/(8\pi)$  отсутствуют. В рамках ЭМГ такими источниками могут быть либо тепловая энергия электронов, либо их кинетическая энергия.

Первый, наиболее часто рассматриваемый случай реализуется при выполнении неравенств  $\beta \gg 1$  (доминирование тепловой энергии),  $a \gg c/\omega_{pe}$  (несущественность кинетической энергии,  $a$  — характерный размер) и соответствует генерации поля вследствие термо-ЭДС. Качественно он может быть описан уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{e} \left[ \nabla \frac{1}{n}, \nabla p \right] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}, \quad (6.1)$$

в котором по сравнению с (5.4) и всем предыдущим начисто отсутствуют конвективные члены, малые по параметру  $\beta^{-1}$ . В действительности, однако, интенсивность генерации и уровень ее ограничения весьма чувствительны к различным кинетическим эффектам, не учтенным в чисто гидродинамическом подходе (6.1): теплопроводности, термосилы и другим, определяющим степень неколлинеарности  $\nabla n$  и  $\nabla p$  [53, 54]. В этой ситуации полезно, оставаясь в рамках более простого гидродинамического описания, модифицировать его, разделив электроны на две компоненты — горячую и холодную [15]. Такое двухкомпонентное приближение, как показано далее, позволяет качественно учесть эффекты, следующие из «бесконечно компонентной гидродинамики» — кинетики.

На нетривиальность двухкомпонентного описания впервые указывалось в [55]. Выделение холодной компоненты, кроме того, восстанавливает в правах вмерозенность магнитного поля, потерянную при переходе от (5.4) к (6.1), что также способствует качественному анализу ситуации.

Рассмотрим подробно случай, когда плотность горячей компоненты мала, — он интересен тем, что реализуется в чистом виде в важных практических ситуациях — в лазерной короне [56] и при взаимодействии электронного пучка с плазмой, если  $\rho_b \ll a$  [см. (2.2)].

В обеих ситуациях знание ограничений, накладываемых на генерацию  $B$ , очень важно. Имея в виду применение результатов и к бесстолкновительной плазме, будем пренебрегать влиянием рассеяния электронов на их динамику, считая выполненным неравенство  $\omega_{be}\tau_e \gg 1$ . Таким образом, исходная система уравнений вы-



глядит так.

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -n_{\alpha} e \mathbf{E} - \frac{n_{\alpha} e}{c} [\mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{B}] - \nabla n_{\alpha} T_{\alpha}; \\ \alpha &= c, h; \quad T_h \gg T_c; \quad n_h \ll n_c; \quad n_c + n_h = Z n_i; \\ \partial n_h / \partial t + \operatorname{div} (n_h \mathbf{v}_h) &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= -\frac{4\pi e}{c} (n_c \mathbf{v}_c + n_h \mathbf{v}_h); \\ \partial B / \partial t &= -c \operatorname{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

С помощью малых параметров, выписанных выше, она может быть сведена к двум уравнениям для  $n_h$  и  $\mathbf{B}$  ( $n_c \simeq Z n_i(\mathbf{r})$ ):

$$\partial n_h / \partial t + \operatorname{div} (n_h \mathbf{v}_h) = 0; \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{e} \left[ \nabla \frac{1}{n_c}, \nabla P_h \right] \quad (6.4)$$

(считается, что для каждой компоненты в отдельности  $[\nabla n_{\alpha}, \nabla P_{\alpha}] = 0$ ). Первое из них представляет собой просто уравнение непрерывности, второе описывает генерацию поля [ср. с (6.1)].

Еvidно, что, поскольку из (6.2)  $v_h \sim c \nabla P_h / (n_h e B)$ ,  $n_h$  меняется в  $n_c / n_h$  раз быстрее  $B$  — это следствие вмороженности поля в холодную компоненту и равенства  $\nabla_c \simeq - (n_h / n_c) \mathbf{v}_h$  ( $\beta \gg 1!$ ). Естественно, столь быстрая эволюция в практически статическом магнитном поле должна приводить к установлению какого-то равновесного состояния, обращающего в нуль правую часть (6.3). Иными словами, между  $n_h$  и  $B$  появляется функциональная связь, а это значит, что медленная (по отношению к релаксации  $n_h$ ) генерация поля, описываемая (6.4), сильно модифицируется и заслуживает скорее названия нелинейной динамики.

Покажем это на простом примере:  $\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_z$ ,  $\partial / \partial z = 0$ , течение электронов происходит в плоскости  $(r, \varphi)$ ,  $T_h = \text{const}$ , (6.3) переписывается в виде  $[v_h \text{ определяется из (6.2)}]$

$$\frac{\partial n_h}{\partial t} = \frac{c T_h}{e r} \frac{\partial (n_h, 1/B)}{\partial (r, \varphi)}.$$

Пусть при  $t=0$   $n_h = n_h(\varphi)$ , а  $B = B(r) - n_h$  и  $B$  никак не связаны.

Тогда  $n_h = n_h(\varphi - f(r)t)$ ,  $f(r) = \frac{c T_h}{e r} \frac{d(1/B)}{dr}$  — как уже упоминалось,

при решении (6.3)  $B$  можно считать не зависящим от времени. В общем случае  $f(r) \neq \text{const}$  и эволюция профиля идет с «закручиванием» линий уровня (рис. 11), и уже через несколько оборотов появляется сильная зависимость  $n_h(r)$ , т. е.  $n_h(B)$  (конкретный ее вид определяется начальными условиями). Легко видеть, что в данном простейшем случае этот же результат может быть получен и в чистой кинетике — дрейф горячих электронов в неоднородном поле вдоль линий  $B = \text{const}$  с различной скоростью на

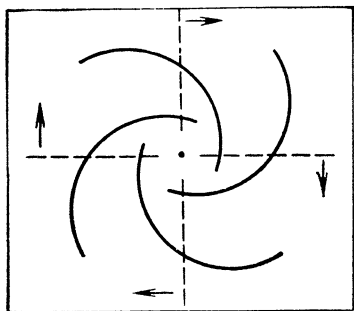


Рис. 11. Установление зависимости  $n_h(B)$

различных линиях приводит к установлению зависимости  $P_h(B)$ . Подставляя это выражение в (6.4), получаем

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{cT_h}{er} \frac{dn_h}{dB} \frac{\partial (1/n_c, B)}{\partial (r, \varphi)},$$

т. е. нелинейная динамика  $B$  в плоской геометрии является чисто сносовой, и увеличения амплитуды  $B$  не происходит. Эта динамика, однако приводит, вообще говоря, к «прокидыванию» профиля  $B$  (т. е. к своеобразной филаментации тока —

эффект, наблюдавшийся в численных расчетах [57]), после которого включаются либо столкновения холодных электронов с ионами, либо инерция горячих (конечный гирорадиус  $\rho_{Vh}$ ).

Таким образом, уравнения (6.3), (6.4) допускают и такую интерпретацию: они описывают быстрое установление равновесного распределения горячих частиц в квазистатической магнитной ловушке и ее медленную эволюцию из-за сноса поля холодными частицами (в сильно столкновительной плазме эволюция ловушки возможна и при  $n_c = \text{const}$  за счет диффузии магнитного поля). Для одномерного случая этот процесс рассматривался в [58]. Такая аналогия сразу позволяет сделать вывод о том, что в общем случае в результате быстрой релаксации устанавливается хорошо известное равновесное соотношение для частиц в ловушке  $P_h = P_h(U)$ ,  $U = \int ds/B$ , где  $ds$  — элемент длины силовой линии [4] (надо, однако, помнить, что в отличие от обычных ловушек в данной ситуации удержание частиц в конечном счете происходит в результате инерции ионов, а не магнитного поля). В принципе, характер установления этого соотношения можно проследить аналогично плоскому случаю, записав (6.3) в криволинейной системе координат с одной из осей, направленной вдоль  $\mathbf{B}$ . Реально все же эта система координат в общем случае отнюдь не такая простая, как использованная выше цилиндрическая. Она, например, не может быть ортогональной при  $\text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \neq 0$ . Нелинейная динамика магнитного поля при такой неяркой зависимости  $P_h$  от  $B$  уже не чисто сносовая, и в результате ее может происходить некоторое увеличение (или уменьшение)  $B$ , но и здесь в силу быстро вступает эффект опрокидывания.

Если в системе отсутствует перераспределение между продольным и поперечным относительно  $\mathbf{V}$  движениями электронов (ему могут способствовать, например, редкие столкновения с ионами [5]), то можно обобщить рассмотренную картину, введя два давления:  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$ . Зависимость  $n_h$  от  $B$  при этом, естественно, более сложная [15], но качественная картина не меняется.

Все вышесказанное относилось, как нетрудно видеть, к регулярному течению горячих электронов, происходящему по системе

неких поверхностей (в изотропном случае поверхностей  $\int ds/B = \text{const}$ ) — вдоль них, и выравнивается  $P_h$ . (Речь идет об усредненной гидродинамической скорости — дрейфовые траектории отдельных частиц могут сильно от них отличаться.) При нарушении этого обстоятельства хаотичное в некоторой области движение электронов приводит вследствие размешивания к установлению в ней  $P_h = \text{const}$  и, следовательно, к полному прекращению эволюции  $B$ :  $\partial B/\partial t \equiv 0$ . Таким образом, в двухкомпонентной электронной плазме с  $n_h \ll n_c$  генерация магнитного поля сильно подавляется уже на стадии  $\beta \gg 1$ .

При  $n_h \sim n_c$  уравнения для магнитного поля и плотности электронов не расщепляются по времени и требуют совместного решения. Тем не менее выделение холодной компоненты — «хранителя замороженности», формально всегда возможное, если роторная часть электрического поля ортогональна  $\mathbf{B}$  (например, если  $\nabla P \perp \mathbf{B}$  или  $\nabla n \perp \mathbf{B}$ )  $\mathbf{E}_{\text{rot}} = \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ , может оказаться полезным, даже если окажется, что  $n_c \ll n_h$ . Например, из такого подхода очень просто получается вывод о сохранении топологии магнитного поля (инварианта Хопфа  $\int \mathbf{B} \mathbf{A} d^3r$  [4]) при эволюции последнего (правда, лишь в том случае, когда нет неприятностей со сходимостью интегралов на бесконечности).

Второй случай — случай генерации поля за счет кинетической энергии электронов — в простейшем варианте однокомпонентности электронной жидкости по аналогии с обычной МГД может быть назван электронным динамо. Для него условие доминирования энергии источника сводится к простому ограничению на характерный масштаб движения электронов:  $a \ll c/\omega_{pe}$  ( $\beta \rightarrow 0$ ), а генерация поля — к наличию потока энергии в большие масштабы. Согласно [23] этот поток существует в простейшей двумерной задаче ( $\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{j} = 0$ ), но, по-видимому, отсутствует в более общих трехмерных случаях — ситуация, прямо противоположная одножидкостной МГД [59].

Более же интересная генерация крупномасштабного магнитного поля ( $a \gg c/\omega_{pe}$ ) в холодной плазме возможна лишь при наличии каких-либо других компонент среды, обладающих кинетической энергией — например, электронного или ионного пучка. Именно ей соответствует член  $(c/\sigma) \text{rot } \mathbf{j}_b$  в уравнении (2.10), приводящий на первой стадии к линейному росту  $B$  во времени [20]. В однородной вдоль  $j_b$  задаче это уравнение упрощается:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{c}{\sigma} \text{rot } \mathbf{j}_b + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta B. \quad (6.5)$$

Энергия от пучка здесь отбирается при его торможении в индукционном электрическом поле. (При  $u_b < v_{Te}$  и спитцеровской проводимости в силу вступает трение пучка об электроны плазмы и их увлечение, и у члена, ответственного за генерацию, появляется множитель  $(1 - z_b^2/z^2)$ .) С физической точки зрения при таком механизме генерации происходит пространственное разделение

токов электронов плазмы и пучка. Это разделение может происходить и на более мелких по сравнению с радиусом пучка размерах ( $a \ll r_b$ ), причем не только вследствие конечной проводимости плазмы, как в рассмотренном примере, но и из-за неустойчивости геликонной моды колебаний в многокомпонентной среде (сноса  $B$  электронной жидкостью) [9, 60]. При этом генерация поля сопровождается филаментацией пучка и для ее описания необходимо дополнить (6.5) [при нарушении однородности вдоль  $j_b$  — (2.10)] — уравнения непрерывности и динамики для частиц пучка [9, 10, 20, 60]. Получаемая в результате система уравнений довольно сложная, и из нее удастся получить лишь инкремент филаментационной неустойчивости. Оценка его в диссипативном случае может быть сделана на основе (6.5)  $\gamma \sim (1/B) c j_b / \sigma a$ , а характерный масштаб и  $B$  определяются из условия существенного влияния поля на движение частиц пучка:  $a \sim r_b \sqrt{I_b / I_{Ab}}$ ,  $B = j_b a / c$ ,  $I_{Ab} = m_b c^2 v_b / e_b$ . Отсюда  $\gamma \sim c^2 / (\sigma a^2) \sim c^2 / (\sigma v_b^2) I_b / I_{Ab}$ . Для развития геликонной неустойчивости достаточно превышения генерируемого поля над уже существующим и  $a \sim r_b \sqrt{I_b / I}$  ( $I$  — суммарный ток). Инкремент здесь просто  $\gamma \sim u_{\perp} / a$ , где  $u_{\perp}$  — поперечная к  $j_b$  скорость смещения электронов плазмы, в  $n_b / n$  раз меньшая поперечной скорости смещения пучка, которая, в свою очередь, по порядку равна поперечной скорости частиц пучка  $v_{\perp} \sim v_b \sqrt{I / I_b}$ , т. е.  $\gamma \sim (n_b / n) (v_b / r_b)$  [60].

Таким образом, описание генерации магнитного поля в рамках ЭМГ требует во многих случаях учета многокомпонентности плазмы, приводящей к интересным и нетривиальным эффектам.

## 7. ПРОЯВЛЕНИЕ ЭФФЕКТОВ ЭМГ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Самый простой пример эффекта сноса магнитного поля током можно наблюдать с помощью обычного радиоприемника — помехи, известные под названием свистящих атмосфериков, или геликонов, — это волны, рождающиеся в ионосфере и описываемые уравнением

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{u}, \mathbf{B}], \quad (7.1)$$

которое нужно линеаризовать на фоне  $B_0 = \text{const}$ ,  $n_0 = \text{const}$  ( $n_0$  — концентрация электронов):

$$\partial \mathbf{B}_1 / \partial t = \text{rot} [\text{rot} \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_0] = (\mathbf{B}_0 \nabla) \text{rot} \mathbf{B}_1. \quad (7.2)$$

Для гармонической волны ( $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} e^{i\mathbf{k}r}$  и  $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{e}_z$ )

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = k_z \mathbf{B}_0 [\mathbf{k}, \mathbf{B}]. \quad (7.3)$$

В такой записи хорошо видна спиральность волны. Роль геликонов в ЭМГ аналогична роли альфвеновских волн в одножидкостной гидродинамике. При  $k_z = 0$  частота геликонов обращается в нуль, ненулевую частоту можно получить при учете зависимости  $B_0$  или  $n_0$  от координаты. Такие волны называют градиентными,

их также удается регистрировать в экспериментах. Например, в полупроводниковой плазме [17] экспериментально наблюдался снос магнитного поля током, обязанным своим происхождением градиенту температуры (эффект Нернста—Эттинсгаузена). Конкретным проявлением этого эффекта было проникновение поля в область, запрещенную классическим скином.

Вообще твердотельная плазма представляется, с одной стороны, важным и большим полем для развития теории ЭМГ, а с другой — перспективной областью для ее экспериментального исследования благодаря большей разработанности диагностик. В первую очередь это связано с отсутствием ограничений на характерные масштаб и время процессов со стороны больших значений: если заряд носителей тока (электронов или дырок) компенсирован решеткой, то движением второй компоненты можно пренебречь всегда (т. е.  $c/\omega_{pi} \rightarrow \infty$ ). К сожалению, несмотря на уже обнаруженные в экспериментах твердотельные ЭМГ-эффекты (см. процитированные работы), их теоретическая проработка проводится довольно медленно. Это тем более печально, что первые работы по ЭМГ (см. [6, 7]) ориентировались именно на плазму полупроводников.

Теория всех линейных волн одинакова, поэтому упомянутые выше геликоны почти не несут специфики ЭМГ. Более специфичным проявлением эффектов ЭМГ в эксперименте является нарушение симметрий, имеющих в одножидкостной гидродинамике. Одножидкостная гидродинамика симметрична относительно замены  $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$  и не чувствует направления тока. Например, при исследовании пере замыкания магнитных силовых линий используются установки, в которых в исходном состоянии ток течет только вдоль одной оси,  $j_z(x, y)$ , а магнитное поле лежит в плоскости  $B_x(x, y)$ ,  $B_y(x, y)$  [62, 63]. (В установке «УН — Феникс» ось  $z$  свернута в кольцо [63].) В одножидкостной гидродинамике такая симметрия сохраняется при эволюции, учет же сноса магнитного поля током приводит к появлению третьей компоненты магнитного поля  $B_z(x, y)$ . Действительно, электроны, двигаясь по  $z$ , переносят силовую линию со скоростью, вообще говоря, разной в разных точках, в результате линия выходит из плоскости  $(x, y)$ . В некоторых экспериментах действительно наблюдался перекося силовых линий.

Другой пример нарушения симметрии наблюдается в перетяжках  $z$ -пинчей. В одножидкостной гидродинамике направления к аноду и катоду ничем не различаются, в двухжидкостной направление движения электронов выделено, поэтому перетяжки, в которых токовая скорость порядка альфвеновской, должны быть асимметричны. Такая асимметрия наблюдалась во многих экспериментах с микропинчами и взрывающимися проволочками.

Эволюция магнитного поля перетяжек описывается уравнением типа уравнения Бюргерса, описывающего скачки магнитного поля — токовые слои. Авторы работы [61], изучавшие взрыв проволочки током, прямо связывают наблюдавшиеся кольцевые образования, светящиеся в рентгеновской области, с этим явлением.

Отношение скорости тока к альфвеновской в этих экспериментах составляло  $u/v_A \geq 3$ . Аналогичная ситуация, видимо, имела место в короне радиационно охлаждаемой проволоочки [64].

Может показаться, что и в установках с малой скоростью тока ( $u \ll v_A$ ) конфигурация магнитного поля должна сильно искажаться за время перемещения электронов  $\tau = L/u$  на размер установки. Однако это не так. Уравнение этой эволюции имеет вид

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{j} / (ne), \mathbf{B}],$$

эволюция отсутствует, если вектор  $[\mathbf{j} / (ne), \mathbf{B}]$  потенциальный. В конфигурациях, находящихся в равновесии  $[\mathbf{j}, \mathbf{B}] = \nabla P$  — потенциальный вектор, а если дополнительно предположить, что концентрация  $n(\mathbf{r})$  на магнитных поверхностях постоянна, как это обычно и бывает, то потенциален и вектор  $[\mathbf{j} / (ne), \mathbf{B}]$  (см. об этом же в гл. 5). По этой причине эффекты сноса магнитного поля важны в основном для инерциального УТС, где равновесие не обязательно. Не сказываясь на условиях равновесия, эффект сноса влияет на устойчивость. Простейшие примеры дает цилиндрический z-пинч [11, 46].

Аномальная электронная теплопроводность в токамаках — это явление, о котором здесь упоминается ввиду его большой важности. Обычной электронной гидродинамикой оно описывается плохо, хотя возможности ЭМГ здесь, на наш взгляд, не исчерпаны. Обзоров по этой теме нет, можно рекомендовать лишь оригинальные работы [65—67].

Важной областью приложения ЭМГ обещает стать теория плазменных размыкателей, применяемых для обострения мегаамперных импульсов тока при временах переключения  $10^{-5}$ — $10^{-8}$  с [68, 69]. Возрастание сопротивления размыкателя связано с уменьшением плотности плазмы, при этом фактически всегда происходит и область концентраций, в которой работает ЭМГ:

$$M_i c^2 / Ze^2 \gg na^2 \gg mc^2 / e^2. \quad (7.4)$$

Здесь  $a$  — характерный размер;  $n$  — концентрация. Тем не менее авторы практических всех работ не замечают этого и «сшивают» область  $na^2 \gg M_i c^2 / Ze^2$  с областью  $na^2 \ll mc^2 / e^2$ . Между тем учет сноса магнитного поля током приводит к появлению такого специфического явления, как ЭМГ-сопротивление (гл. 4). Исследованная экспериментально [69] эволюция магнитного поля в такой системе весьма похожа на снос  $\mathbf{V}$  вдоль линий  $nr^2 = \text{const}$  (гл. 5).

Фокусировка тока, наблюдаемая в сильноточных диодах [70], может объясняться в рамках ЭМГ [11], во всяком случае необходимый для применимости теории диапазон параметров заведомо приходится при движении от катода к аноду.

Существует также целый ряд объектов, в которых может выполняться приближение ЭМГ, но диагностические трудности и недостаточная пока популярность ЭМГ не позволяют проверять соответствие теории эксперименту. Сюда можно отнести бесстолкновительные ударные волны, лазерную корону и плазму многих от-

носителем небольших установок. Так, филаментация, хорошо известная в лазерной короне [56], наблюдается и в сильноточных диодах [71]. Одно из объяснений опирается на существование быстрых электронов (в которых никогда нет недостатка при импульсном нагреве плазмы [72]) и существенно использует эффекты ЭМГ [10, 73]. Отметим также предложенный В. Н. Петвиашвили [25] метод моделирования плазменных вихрей в чашах с водой. Полученные таким образом экспериментальные результаты [29, 30, 74] согласуются в основном с результатами теории (см. гл. 3).

Эффект Холла использовали для объяснения наблюдавшегося в плазменном фокусе эффекта скольжения разряда вдоль анода [75].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

От внимательного читателя едва ли ускользнуло то обстоятельство, что причина существенной нелинейности рассмотренных в обзоре явлений связана не с большой амплитудой возмущений, а с аномально малой частотой линейных колебаний. Частоты были малы, так как рассматривались возмущения, постоянные вдоль магнитного поля. Во многих плазменных устройствах магнитное поле обладает широм, и возмущения могут быть лишь почти постоянны вдоль поля, нелинейная теория таких возмущений пока не построена и, видимо, будет развиваться в ближайших годах.

Другим важным направлением является применение теории ЭМГ к интерпретации экспериментов. До сих пор для интерпретации используют обычную одножидкостную гидродинамику или электронную гидродинамику с инерцией электронов без учета собственного магнитного поля тока. Между этими двумя областями лежит область применимости ЭМГ, занимающая по концентрации плазмы большой диапазон порядка  $M_i/(Zm)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брагинский С. И.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1.
2. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З.//Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Вып. 3.
3. Волков Т. Ф.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4.
4. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
5. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича и Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 11.
6. Морозов А. И., Шубин А. П.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1964. Т. 46. С. 710—718.
7. Брызгалов В. И., Морозов А. И.//Там же. 1965. Т. 49. С. 1789—1797.
8. Гордеев А. В., Рудаков Л. И.//Там же. 1968. Т. 55. С. 2310—2321.

9. Gordeev A. V., Kingsep A. S., Rudakov L. I., Chukbar K. V.//X Europ. Conf. on Plasma. Moscow, 1981. Vol. 1. P—11.
10. Рудаков Л. И.//Письма в ЖЭТФ, 1982. Т. 35. С. 72—74.
11. Чернов А. А., Яньков В. В.//Физика плазмы. 1982. Т. 8. С. 931—940. См. Также: Чернов А. А., Яньков В. В.//Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 1982. Вып. 1(9). С. 61—63.
12. Кингсеп А. С., Рудаков Л. И., Чукбар К. В.//Докл. АН СССР. 1982, Т. 262. С. 1131—1134.
13. Кингсеп А. С., Мохов Ю. В., Чукбар К. В.//Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 854—859.
14. Захаров В. Е.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1971. Т. 60. С. 1714—1726; Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.//Препринт ИАЭ СО АН СССР № 186, Новосибирск, 1982.
15. Исиченко М. Б., Чукбар К. В., Яньков В. В.//Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 85—87.
16. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977, Гл. 4.
17. Копылов В. Н.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1980. Т. 78. С. 198—205.
18. Гуревич Я. Э., Зегря Г. Г.//Там же. С. 123—131.
19. Breizman V. N., Ryutov D. D.//Nucl. Fus. 1973. Vol. 13. P. 749—751.
20. Иванов А. А., Рудаков Л. И.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1970. Т. 58. С. 1332—1341.
21. Кингсеп А. С., Рудаков Л. И., Чукбар К. В.//Физика плазмы. 1982. Т. 8. С. 950—957.
22. Мохов Ю. В., Чукбар К. В.//Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 1984. Вып. 4(17). С. 3—4.
23. Петвиашвили В. И., Яньков В. В.//Вопросы теории плазмы/Под ред. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат. 1985. Вып. 14.
24. Филиппов Д. В., Чернов А. А., Яньков В. В.//Препринт ИАЭ—3838/6. М., 1983.
25. Петвиашвили В. И.//Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32. С. 632—635.
26. Филиппов Д. В., Яньков В. В.//Физика плазмы. 1986. Т. 12. С. 953—960.
27. Петвиашвили В. И., Яньков В. В.//Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. С. 825—828.
28. Дим Г., Забуски Н.//Солитоны в действии/Пер. с англ. М.: Мир, 1981.
29. Антипов С. В., Незлин М. В., Снежкин Е. М., Трубников А. С.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1982. Т. 82. С. 145—160.
30. Антонова Р. А., Жвания Б. П., Ломинадзе Дж. Г. и др.//Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 545—548.
31. Ларичев В. Д., Резник Г. М.//Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. С. 1077—1079.
32. Лэмб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
33. Ступаков Г. В.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1984. Т. 87. С. 811—821.
34. Гордеев А. В.//Журн. прикл. мех. и тех. физ. 1977. № 7. С. 47—54.
35. Крылов С. Ф., Яньков В. В. Препринт ИАЭ—3542/6. М., 1982.
36. Арнольд В. И.//Материалы Всес. школы по дифференциальным уравнениям (Дилижан, 1973). Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1974.
37. Сыроватский С. И.//Природа. 1978. № 6. С. 84—92.



38. Вайнштейн С. И.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1973. Т. 64. С. 139—145.
39. Завойский Е. К., Рудаков Л. И.//Атомная энергия. 1967. Т. 23. С. 417—431.
40. Галеев А. А., Сагдеев Р. З.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973. Вып. 7.
41. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.//Успехи физ. наук. 1975. Т. 117. С. 401—435.
42. Чернов А. А., Яньков В. В.//Сб. трудов Всес. конф. по взаимодействию излучения, плазменных и электронных потоков с веществом. М., 1984.
43. Бабыкин М. В.//Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы/Под ред. В. Д. Шафранова. М.: Изд-во ВИНТИ, 1981. Т. 1. Ч. 2.
44. Филиппов Н. В.//Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31. С. 131—135.
45. Короп Е. Д., Мейерович Б. Э., Сидельников Ю. В., Сухоруков С. Т.//Успехи физ. наук. 1979. Т. 129. С. 87—112.
46. Игитханов Ю. Л., Кадомцев Б. Б.//Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. С. 1018—1021.
47. Вихрев В. В., Коржавин В. М.//Физика плазмы. 1978. Т. 4. С. 735—745.
48. Рудаков Л. И.//Физика плазмы. 1978. Т. 4. С. 72—77.
49. Имшенник В. С. Двумерные численные модели плазмы/Под ред. К. В. Брушлинского. М.: Изд. ИПМ АН СССР, 1979.
50. Зуева Н. М., Имшенник В. С., Локуцкий О. В., Михайлова М. Е.//Там же.
51. Кингсеп А. С., Чукбар К. В.//Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 769—773; Кингсеп А. С., Чукбар К. В.//Препринт ИАЭ № 3962/6. М., 1984.
52. Татарнинова Е. Б., Чукбар К. В.//Препринт ИАЭ № 4189/6. М., 1985.
53. Большов А. А., Дрейзин Ю. А., Дыхне А. М.//Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 288—291.
54. Большов А. А., Дрейзин Ю. А., Дыхне А. М. и др.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1979. Т. 77. С. 2289—2296.
55. Алиев Ю. М., Быченков В. Ю., Фролов А. А.//Физика плазмы. 1982. Т. 8. С. 125—133.
56. Ковальский Н. Г.//Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы/Под ред. В. Д. Шафранова. М.: Изд-во ВИНТИ, 1980. Т. 1. Ч. 1.
57. Yabe T., Miwa K., Sugiyama T., Yoshikawa K.//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 242—245.
58. Гордеев А. В., Рудаков Л. И., Шуваев В. Ю.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1983. Т. 85. С. 155—165.
59. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982. § 74.
60. Гордеев А. В., Рудаков Л. И.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1982. Т. 83. С. 2048—2055.
61. Айвазов И. К., Аранчук Л. Е., Боголюбский С. Л., Волков Г. С.//Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 111—114.
62. Кирий Н. П., Марков В. С., Франк А. Г., Ходжаев А. З.//Физика плазмы. 1977. Т. 3. С. 538—544.
63. Алтынцев А. Т., Красов В. И.//Журн. техн. физ. 1974. Т. 44. С. 2629—2631.

64. Аранчук Л. Е., Боголюбский С. Л., Волков Г. С. и др.//Физика плазмы. 1986. Т. 12. С. 1241—1250.
65. Ohkawa T.//Phys. Lett. 1987. Vol. 67A. P. 35—37.
66. Kadomtsev V. B., Pogutse O. P.//Nonlinear and Turbulent Process in Physics/Ed. by R. Z. Sagdeev, N. Y.: Harwood Academic Publishers. 1984. Vol. 1. P. 257—265.
67. Параил В. В., Юшманов П. И.//Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 278—280.
68. Waisman E. M., Steen P. G., Parks D. E., Wilson A.//Appl. Phys. Lett. 1985. Vol. 42. P. 1045—1047.
69. Meger R. A., Commiso R. J., Cooperstein G., Goldstein S. A.//Appl. Phys. Lett. 1983. Vol. 42. P. 943—945.
70. Горбулин Ю. М., Злотников Д. М., Калинин Ю. Г. и др.//Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35. С. 332—334.
71. Королев В. Д., Смирнов В. П., Тулупов М. В. и др.//Докл. АН СССР, 1983. Т. 270. С. 1110—1112.
72. Кингсеп А. С.//Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы/Под ред. В. Д. Шафранова. М.: Изд-во ВИНТИ, 1983. Т. 4.
73. Исиченко М. Б., Кингсеп А. С.//Физика плазмы. 1986. Т. 12. С. 165—168.
74. Антонова Р. А., Жвания Б. П., Нанобашвили Дж. И., Яньков В. В.//Сообщения АН ГССР. 1985. Т. 118. С. 97—100, 501—503.
75. Брагинский С. И., Вихрев В. В.//Вопросы теории плазмы/Под ред. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат. 1980. Вып. 10.

**Кинетическая теория конвективного переноса быстрых частиц в токамаках.  
А. В. Гуревич, Я. С. Димант**

Введение . . . . .	3
1. Общее качественное рассмотрение . . . . .	4
1.1. Магнитная гофрировка . . . . .	4
1.2. Локально-запертые частицы . . . . .	6
1.3. Диффузионный предел . . . . .	8
1.4. Кинетическая конвекция . . . . .	10
1.5. Искажение функций распределения . . . . .	11
1.6. Адиабатический захват . . . . .	12
1.7. Цель исследования . . . . .	16
2. Основные уравнения . . . . .	18
2.1. Исходное кинетическое уравнение. Оператор соударений . . . . .	18
2.2. Дрейфово-кинетическое уравнение . . . . .	22
2.3. Система криволинейных координат . . . . .	26
2.4. Усреднение по продольному движению (запертые частицы) . . . . .	28
2.5. Сглаженная функция распределения банановых частиц . . . . .	31
2.6. Пролетные частицы . . . . .	32
2.7. Обсуждение упрощенных уравнений для банановых и пролетных частиц . . . . .	34
2.8. Локально-запертые частицы . . . . .	35
2.9. Уравнения ККП . . . . .	41
2.10. Тонкий токамак без радиального электрического поля . . . . .	44
2.11. Токамак с вертикально-однородной гофрировкой . . . . .	47
2.12. Условия применимости уравнений ККП . . . . .	49
3. Кинетический конвективный перенос . . . . .	51
3.1. Распределение гофрировки магнитного поля в токамаке . . . . .	51
3.2. Низкоэнергетический диффузионный предел . . . . .	53
3.3. Конвективный перенос быстрых ионов . . . . .	56
3.4. Перенос быстрых электронов . . . . .	62
3.5. Адиабатический захват и вынос частиц . . . . .	72
3.6. Конвективный перенос частиц и энергии в токамаке . . . . .	76
Приложения . . . . .	84
П1. Консервативные преобразования . . . . .	84
П2. Усреднение по периодической переменной . . . . .	86
П3. Усреднение по аксиальному углу в пространстве скоростей [вывод дрейфово-кинетического уравнения (2.29)] . . . . .	91
П4. Усреднение по продольному движению частиц . . . . .	94

П.5. Усреднение по координате $\xi$ . . . . .	97
Список литературы . . . . .	100
Диффузионные транспортные процессы в токамаках, обусловленные гофрировкой. <i>П. Н. Юшманов</i>	
Введение . . . . .	102
1. Траектории частиц в гофрированном магнитном поле токамака . . . . .	103
1.1. Гофрировка тороидального магнитного поля токамака . . . . .	103
1.2. Траектории частиц в гофрированном магнитном поле . . . . .	111
1.3. Бесстолкновительные переходы между банановыми и локально-запертыми частицами . . . . .	120
2. Транспортные процессы, обусловленные локально-запертыми частицами . . . . .	125
2.1. Основные характеристики переноса локально-запертых частиц . . . . .	125
2.2. Потоки локально-запертых частиц в режиме высоких частот соударений . . . . .	131
2.3. Потоки локально-захваченных частиц при низких частотах соударений . . . . .	136
2.4. Ионный теплоперенос в переходном режиме . . . . .	142
3. Гофрировочные потоки банановых частиц . . . . .	148
3.1. Качественный анализ процессов переноса . . . . .	148
3.2. Процессы переноса в бананово-дрейфовом режиме . . . . .	157
3.3. Обобщение бананово-дрейфового кинетического уравнения . . . . .	164
3.4. Радиальные потоки, создаваемые банановыми частицами . . . . .	168
4. Гофрировочные потери частиц высоких энергий . . . . .	175
4.1. Оценка потерь высокоэнергетических частиц из кинетического уравнения . . . . .	175
4.2. Расчет гофрировочных потерь $\alpha$ -частиц методом Монте-Карло . . . . .	181
4.3. Циклотронное взаимодействие частиц высоких энергий с гофрировкой тороидального поля . . . . .	185
Приложения . . . . .	190
П1. Гофрировка магнитного поля в токамаках с круглыми катушками . . . . .	190
П2. Поправка к гофрировочному переносу локально-запертых частиц с учетом пограничного слоя . . . . .	192
П3. Транспортные коэффициенты при произвольной вероятности захвата банановых частиц . . . . .	196
П4. Резонансный перенос банановых частиц . . . . .	199
П5. Радиальные потоки при произвольной форме магнитных поверхностей . . . . .	203
Список литературы . . . . .	207
Электронная магнитная гидродинамика. <i>А. С. Кингсеп, К. В. Чукбар, В. В. Яньков</i>	
1. Общие положения . . . . .	209
2. Конвективные скиновые явления в плазме . . . . .	212
2.1. Нелинейный скин-эффект . . . . .	212
2.2. Скиновая задача при наличии пучков заряженных частиц . . . . .	215
3. Устойчивые двумерные электронные вихри . . . . .	219
3.1. Вихрь как фундаментальный объект . . . . .	219

3.2. Вихри в однородной плазме . . . . .	220
3.3. Новое «универсальное» двумерное уравнение в слабонеоднородной среде . . . . .	222
3.4. Устойчивые вихри и солитоны в неоднородной плазме . . . . .	224
3.5. Псевдодвумерные вихри . . . . .	226
4. Турбулентность и ЭМГ-сопротивление . . . . .	228
4.1. Трехмерные устойчивые вихри и трехмерная турбулентность . . . . .	228
4.2. ЭМГ-сопротивление . . . . .	230
5. z-Пинч . . . . .	235
5.1. ЭМГ-эффекты в z-пинче . . . . .	235
5.2. Электронные течения в пинче малой плотности . . . . .	236
5.3. Резистивный пинч . . . . .	238
6. Генерация магнитного поля . . . . .	239
7. Проявление эффектов ЭМГ в экспериментах . . . . .	244
Заключение . . . . .	247
Список литературы . . . . .	247
Рефераты статей, опубликованных в данном выпуске . . . . .	254

## РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ДАННОМ ВЫПУСКЕ

УДК 621. 039. 626, 533.9

**А. В. Гуревич, Я. С. Димант.** Кинетическая теория конвективного переноса быстрых частиц в токамаках//Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1987. — Вып. 16.

Развита теория кинетического конвективного переноса в плазме токамака сверхтепловых ионов и электронов. Данный вид переноса связан с поперечным дрейфом частиц, захваченных в локальные потенциальные ямы слабогофрированного магнитного поля реального токамака. Он приводит к сильным искажениям функций распределения всех групп частиц. Получена упрощенная система зацепляющихся уравнений, позволяющая рассчитывать функции распределения в условиях развитой кинетической конвекции. Рассмотрен ряд конкретных примеров. Получены как аналитические, так и численные решения. Данный процесс проанализирован с точки зрения глобального переноса частиц и энергии в токамаке. Показано, что в достаточно разогретой плазме этот вид переноса может стать определяющим. Соответствующие члены включены в общую систему макроскопических уравнений, используемую для моделирования транспортных процессов в токамаке.

Табл. — Ил. 28. Библиогр. 58

УДК 621.039.626, 533.9

**П. Н. Юшманов.** Диффузионные транспортные процессы в токамаках, обусловленные гофрировкой//Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1987. — Вып. 16.

Дан обзор диффузионных транспортных процессов в токамаках, обусловленных нарушением аксиальной симметрии магнитной системы. Рассмотрена гофрировка в современных установках и проектируемых токамаках-реакторах. Проанализированы траектории локально-запертых и банановых частиц с учетом переходов между этими группами. Вычислены коэффициенты теплопроводности плазмы в гофрированном магнитном поле. Определена эффективность удержания надтепловых частиц с учетом как кулоновских столкновений, так и стохастических процессов.

Табл. 1. Ил. 40. Библиогр. 57.

УДК 533.952

**А. С. Кингсеп, К. В. Чукбар, В. В. Яньков.** Электронная магнитная гидродинамика//Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1987. — Вып. 16.

Представлена гидродинамическая теория плазмы при условии значительного превышения скорости течения электронов над альфвеновской скоростью. Главной особенностью такого приближения является учет сноса магнитного поля током на фоне неподвижных ионов. Рассмотрены теория z-пинчей и сильноточных диодов, генерация магнитного поля, турбулентность и, в частности, роль вихрей и разрывов в динамике плазмы, введено понятие ЭМГ-сопротивления.

Табл. 1. Ил. 11. Библиогр. 75

**СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ**

**ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ**

В ы п. 16

Редактор *З. Д. Андреевко*  
Художественные редакторы: *А. Т. Кирьянов,*  
*А. А. Белоус*  
Технический редактор *В. В. Хапасва*  
Корректор *М. Г. Гулина*

ИБ № 2267

Сдано в набор 03.04.87. Подписано в печать  
06.10.87. Т-20607. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага  
офсетная № 1. Гарнитура литературная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,0. Усл. кр.-отт.  
16,0. Уч.-изд. л. 17,6. Тираж 1400 экз. Заказ 258.  
Цена 3 р. 80 к

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114,  
Шлюзовая наб., 10.

Московская типография № 6 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли.  
109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ